Universidad Católica Andrés Bello

$\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$

$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN Y MODELOS MATEMÁTICOS

$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg$

$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$

PROF. YOEL E. GUTIÉRREZ T.

ESCUELA DE INGENIERÍA

Introducción

Este trabajo ha sido diseñado para cubrir necesidades básicas del curso de ecuaciones diferenciales ordinarias de la UCAB, y ofrecer a los interesados un material flexible que sea fácil de entender.

La intensión no es mostrar muchos detalles tóricos de los temas que se desarrollaran, esto es, no se centrará en las demostraciones de muchos teoremas, pues el propósito es que este recurso sirva de referencia a lectores preocupados por los métodos de solución y la aplicabilidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden..

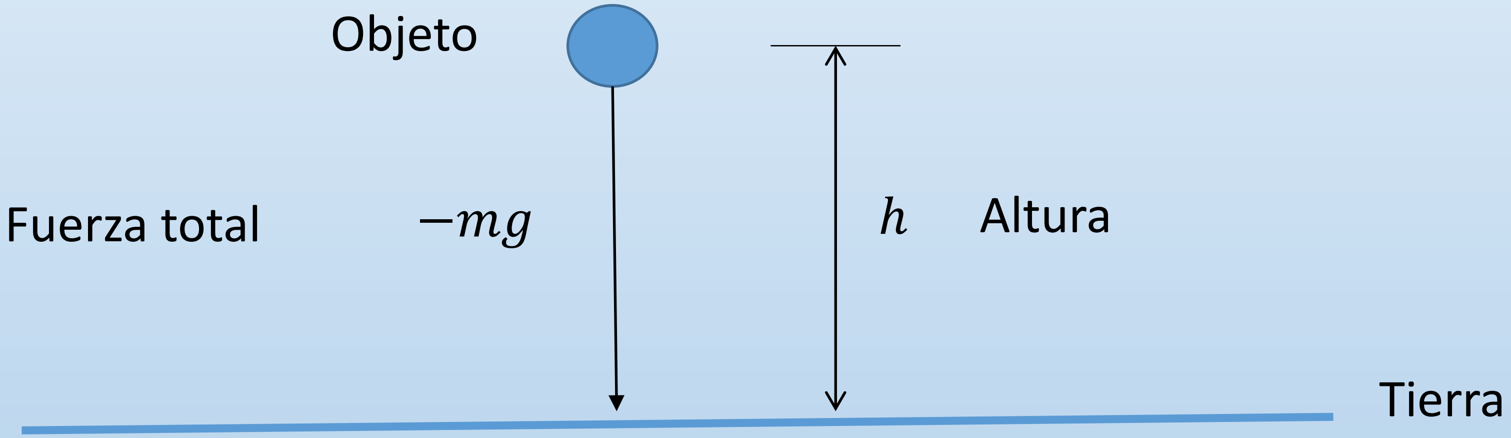
CONTENIDO

FUNDAMENTOS

En la ingeniería frecuentemente se desarrollan modelos matemáticos que generan una ecuación que contiene algunas derivas de una función incógnita, llama **ecuación diferencial (ED).**

Un ejemplo de estos modelos es la caída libre de un cuerpo.

Supongamos que un objeto se libera desde una altura determinada, que la única fuerza que actúa sobre él es la de gravedad y que la dirección ascendente es positiva.



Objeto en caída libre

Aplicando la segunda Ley de Newton obtenemos la ecuación

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg$$

donde *m* es la masa del objeto, *h* es la altura sobre el suelo, $\frac{d^2h}{dt^2}$ es su aceleración, *g* es la fuerza de gravedad y $-mg$ es la fuerza debida a la gravedad.

La ecuación obtenida es una ecuación diferencial que contiene la segunda derivada de la altura desconocida *h* como función del tiempo.

Esta ecuación es fácil de resolverla. Dividiendo entre *m* e integrando dos veces con respecto a *t* obtenemos

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g$$

$$\frac{dh}{dt} = -\int g\,dt$$

$$\frac{dh}{dt} = -gt + c_1$$

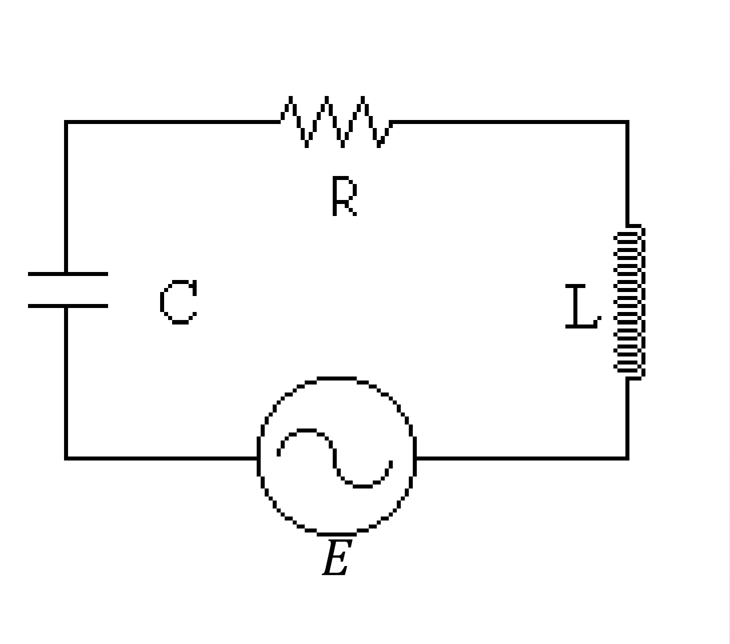
$$h = \int (-gt + c_1)dt$$

$$h = h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2$$

Las constantes de integración c_1 y c_2 quedan determinadas si conocemos la altura inicial y la velocidad inicial del objeto. Finalmente, obtenemos una fórmula para la altura del objeto en el instante t.

Siempre que un modelo matemático implique la **razón de cambio** de una variable con respecto de otra, es probable que aparezca una ecuación diferencial ordinaria.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias surgen en diferentes áreas. Una aplicación clásica aparece en el estudio de un circuito eléctrico formado por un resistor (R), un inductor (L) y un capacitor (C) que son excitados por una fuente de voltaje (E).



Al aplicar la Leyes de Kirchhoff, obtenemos la ecuación

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

donde $q(t)$ es la carga en el capacitor en cada tiempo t.

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) involucra las derivadas de una o más **variables dependientes** con respecto a una **variable independiente.**

Por ejemplo, en la ecuación

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g$$

h es la variable dependiente y *t* es la variable independiente.

En la ecuación

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

q es la variable dependiente y *t* es la variable independiente.

El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de las derivadas de orden máximo que aparecen en la ecuación.

Por ejemplo:

1. $\frac{d^2h}{dt^2} = -g$ es una EDO de segundo orden.

3. $x\frac{dx}{dt} - (1-t)ln\, x = 0$ es una EDO de primer orden.

4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy = sen\, x$ es una EDO de primer orden.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias, las clasificaremos en lineales y no lineales.

Una ecuación diferencial ordinaria es **lineal,** de orden *n,* si se puede escribir de la forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = F(x)$$

Donde $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_o(x)$ y $F(x)$ dependen sólo de la variable independiente *x*.

Las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales

$$t\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{dy}{dt} = \ln t - 4,$$

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} - cx = 0, \qquad a, b \ y \ c \quad \text{constantes}$$

Las siguientes ecuaciones diferenciales no son lineales

$$2t\frac{dy}{dt} - y^2 = 0,$$

$$3\frac{d^2x}{dt^2} - sen\, x\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

En general, una EDO de orden *n* con *y* como variable dependiente y *x* como variable independiente, habitualmente, se suele expresar de las siguientes formas:

1. Usando la notación de Leibniz:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

2. Usando la notación prima:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

3. Despejando, si es posible, el término de orden máximo

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

SOLUCIONES DE UNA EDO

Definición. Una función $y = \phi(x)$ es una **solución explícita** de la EDO

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

en un intervalo *I*, siempre y cuando las derivadas $\phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n)}(x)$ existan en *I*, y transforma esa ecuación en una identidad con sentido en *I*; cuando $y = \phi(x)$ y sus derivadas se sustituyan en ella.

Ejemplo. Mostrar que $\phi(x) = e^{-3x}$ es una solución explícita de la EDO

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solución.

Las funciones

$$\phi(x) = e^{-3x}, \qquad \phi'(x) = -3e^{-3x}, \qquad \phi''(x) = 9e^{-3x}$$

están definidas para toda $x \in (-\infty, \infty)$.

Las sustituir $\phi(x)$ y sus derivas en la EDO, obtenemos

$$\phi''(x) + 6\phi'(x) + 9\phi(x) = 9e^{-3x} + 6(-3e^{-3x}) + 9(e^{-3x}) = 0$$

La expresión anterior es válida para toda $x \in (-\infty, \infty)$, por lo tanto, $\phi(x) = e^{-3x}$ es una solución explícita de la EDO

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

en $(-\infty, \infty)$.

Para nuestros fines, supondremos que una solución $y = \phi(x)$ es una función de valores reales.

Es muy habitual indicar una solución explícita mediante el símbolo alternativo $y(x)$.

Una solución explícita, de una ecuación diferencial, que es idéntica a cero en un intervalo *I*, se llama **solución trivial**. La EDO del ejemplo anterior posee la solución trivial

$$y = 0, \qquad -\infty < x < \infty$$

Cuando abordemos el problema de resolver EDO veremos que los métodos de solución no siempre llevan de forma directa a una solución explícita $y = \phi(x)$.

Definición. Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una EDO, en un intervalo *I*, siempre y cuando exista al menos una función $y = \phi(x)$ que satisfaga la relación y la ecuación diferencial, en *I*.

Ejemplo. Muestre que $y^2 + x - 3 = 0$ es una solución implícita de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$$

en e intervalo $(-\infty, 3)$.

Solución. Usando las técnicas de derivación implícita obtenemos que

$$\frac{d}{dx}(y^2 + x - 3) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 1 - 0 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$$

que es idéntica a la EDO considerada en el ejemplo. Por otra parte, al despejar *y* de $y^2 + x - 3 = 0$, obtenemos que

$$y = \phi(x) = \pm\sqrt{3 - x}$$

Ahora bien, se demuestra fácilmente que

$$\phi_1(x) = \sqrt{3 - x} \qquad y \qquad \phi_2(x) = -\sqrt{3 - x}$$

son soluciones explícitas de la EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$ en el intervalo $(-\infty, 3)$.

Como la diferencia entre una solución explícita y una solución implícita debe quedar clara de forma intuitiva, habitualmente hablaremos simplemente de una solución.

Habitualmente la solución de una ecuación diferencial se da sin restricciones sobre los valores que asume la variable independiente, en este caso asumimos que el intervalo *I* en el cual la función $y = \phi(x)$ es solución, contiene todos los valores para los cuales las operaciones indicadas producen resultados que tienen sentido en los reales.

A la gráfica de una solución de una EDO se le llama **curva solución.**

Al resolver una ecuación diferencial de primer orden, $F(x, y, y') = 0$, por lo general obtenemos una solución con una sola constante arbitraria, o parámetro c. Una solución con una constante arbitraria representa un conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluciones y se llama **familia monoparamétrica de soluciones** o **familia a un parámetro de soluciones**.

Una solución de una EDO que no tiene parámetros arbitrarios se llama **solución particular.**

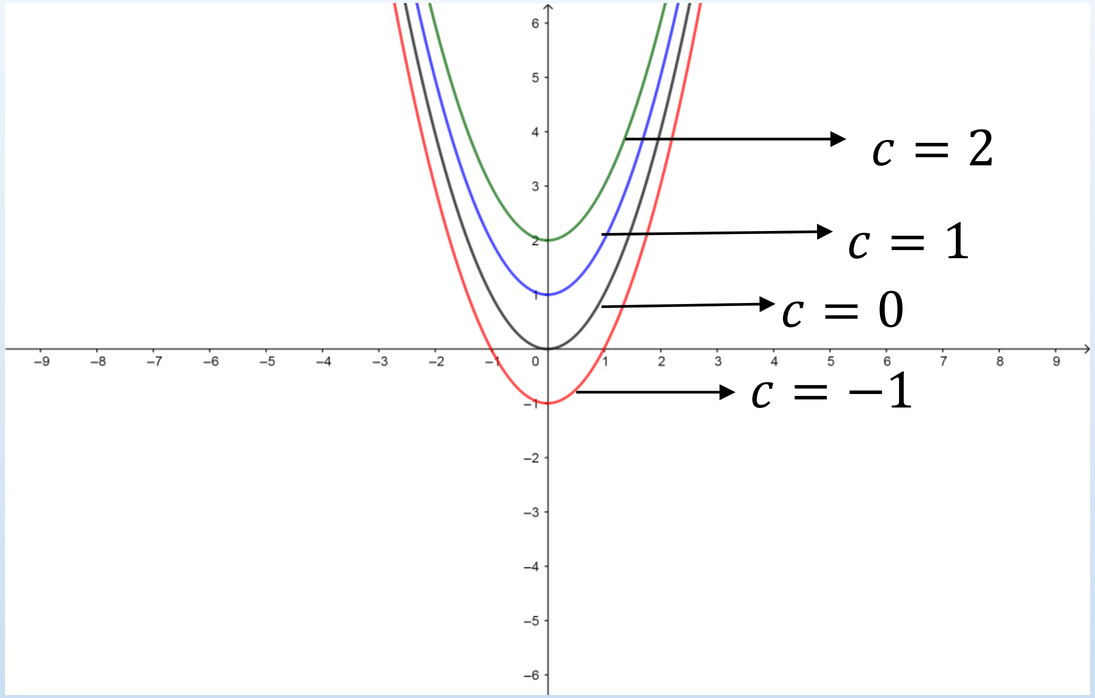
Ejemplo. Se demuestra fácilmente que

$$y = x^2 + c$$

es una familia monoparamétrica de soluciones de la EDO

$$\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

Las gráficas de las soluciones particulares que se obtienen para $c = -1{,}0{,}1{,}2$, se muestran en la siguiente figura.



Curvas soluciones de la EDO $\dfrac{dy}{dx} - 2x = 0$

Al resolver una ecuación diferencial de orden *n*, buscamos una familia n-paramétricas de soluciones $G(x, y, c_1, \dots, c_2)$. Esto quiere decir que las ecuaciones diferenciales tienen, en general, muchas soluciones que corresponden a las elecciones ilimitadas del parámetro o parámetros.

En algunos casos, una ecuación diferencial tiene una solución que no se puede obtener particularizando algunos de los parámetros en una familia de soluciones. Esta solución se llama **solución singular.**

Ejemplo. Demostrar que

$$p = \frac{ce^t}{1 + ce^t}$$

es una familia monoparamétrica de soluciones de la EDO

$$\frac{dp}{dt} = p(1 - p)$$

y que $\mathrm{p} = 1$ es una solución singular de dicha EDO.

Solución. Se tiene que

$$\frac{dp}{dt}=\frac{ce^t(1+ce^t)-ce^t(ce^t)}{(1+ce^t)^2}=\frac{ce^t}{(1+ce^t)^2}$$

y

$$p(1-p)=\frac{ce^t}{1+ce^t}\left(1-\frac{ce^t}{1+ce^t}\right)=\frac{ce^t}{1+ce^t}\cdot\frac{1}{1+ce^t}=\frac{ce^t}{(1+ce^t)^2}$$

Por lo tanto, $p=\frac{ce^t}{1+ce^t}$ satisface la EDO $\frac{dp}{dt}=p(1-p)$

Se demuestra fácilmente que $\mathrm{p}=1$ también satisface la EDO. Supongamos que $\mathrm{p}=1$ es un miembro de la familia monoparamétrica de solucione de la EDO, entonces existe un escalar c tal que

$$1 = \frac{ce^t}{1+ce^t} \Longrightarrow ce^t = 1 + ce^t \Longrightarrow 0 = 1$$

Lo cual es imposible, por lo tanto, $\mathrm{p} = 1$ no es un miembro de la familia de soluciones de la EDO. Esto implica que es una solución singular de dicha EDO.

Esperamos que una EDO siempre tenga solución, y que esta solución contenga una o varias constantes arbitrarias, dependiendo del orden de la EDO. Sin embargo,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

carece de soluciones reales, y

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 0$$

sólo admite la solución y = 0.

PROBLEMAS CON VALORES INICIALES

Definición. Un problema de valor inicial (PVI) es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de la variable independiente. Tales condiciones se llaman
condiciones iniciales.
En algún intervalo *I* que contenga a x_0, el problema

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right),$$
$$y(x_0) = y_0, \qquad y^{(1)}(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

en donde $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ son constantes reales especificadas arbitrariamente, es un PVI de enésimo orden. Los valores dados de la función desconocida, $y(x)$, y de sus primeras $n-1$ derivadas en un solo punto x_0 son las condiciones iniciales.

Los PVI de primero y segundo orden, son fáciles de interpretar en términos geométricos. Para el PVI de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

se pide una solución de la ecuación diferencial en un intervalo *I* que contenga a x_0, tal que la curva solución pase por el punto (x_0, y_0).

Para el PVI de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

se pide una solución de la ecuación diferencial cuya representación gráfica no sólo pase por el punto (x_0, y_0), sino que también la pendiente de la recta tangente a la representación gráfica en ese punto sea y_1.

La mayor parte de los PVI que trataremos tendrán soluciones, y las soluciones serán únicas. Sin embargo, en cualquier PVI, ésta no es la realidad. Antes de resolver un PVI es preferible saber, si existe una solución y, cuando exista, si es única. Puesto que trabajaremos primeramente con EDO de primer orden, enunciaremos un teorema que define las condiciones suficientes que garantizan la existencia y unicidad de la solución de un PVI de primer orden.

Teorema. (Teorema de existencia y unicidad) Sea la región rectangular

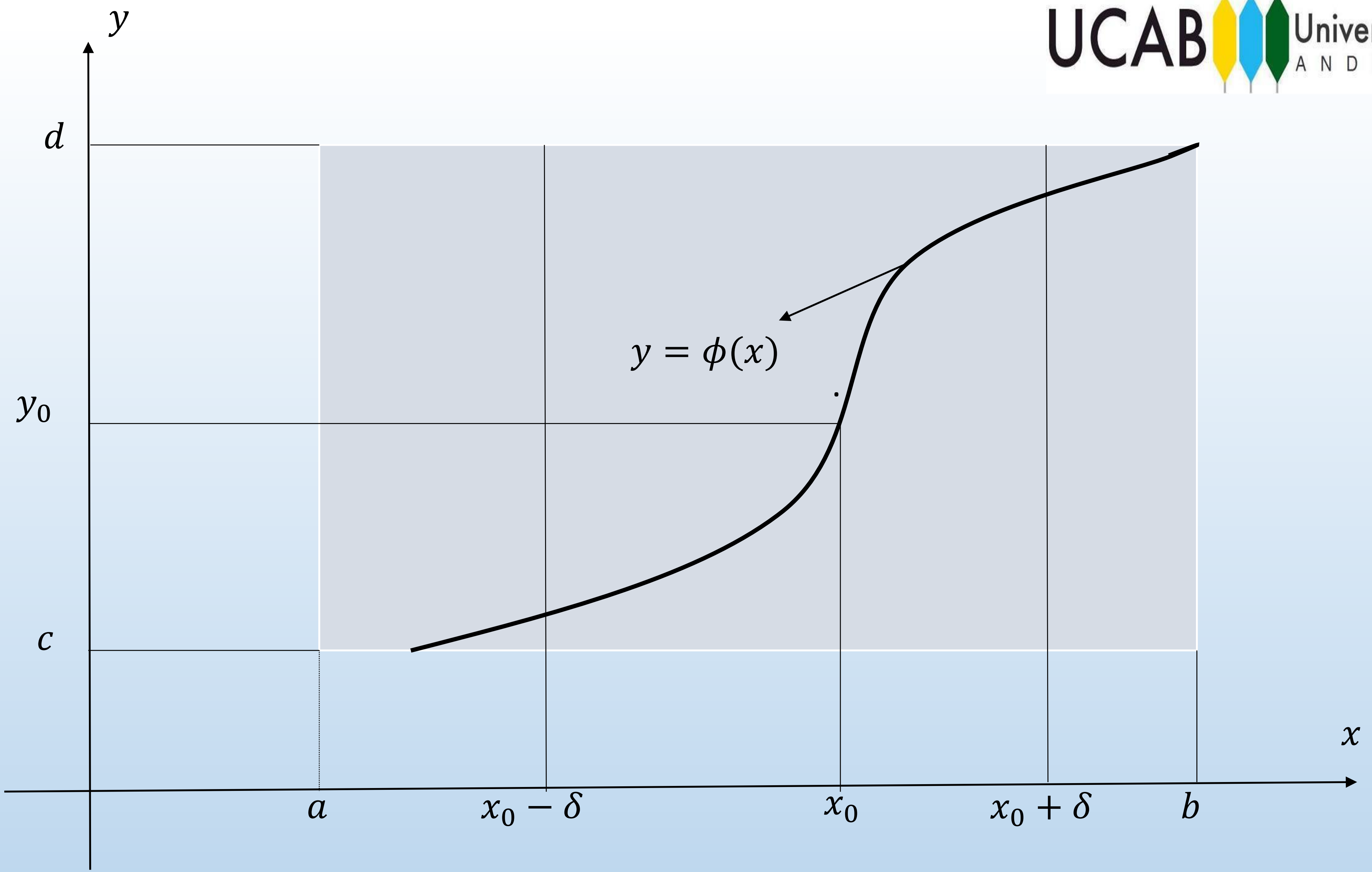
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a < x < b \ \wedge \ c < y < d\}$$

del plano *xy*, que contiene el punto (x_0, y_0). Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ son continuas en *R*, entonces el PVI

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

tiene una solución única $y = \phi(x)$ en un Intervalo abierto $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, donde δ es un real positivo.

En la siguiente figura podemos ver la interpretación geométrica de este teorema.



Interpretación geométrica del teorema de existencia y unicidad

Ejemplo. Demostrar que el PVI

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - xy^3, \qquad y(1) = 6$$

tiene solución única.

Solución. Las funciones

$$f(x,y) = x^2 - xy^3 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -3xy^2$$

son continuas en todo el plano real, por tanto, son continuas en cualquier rectángulo que contenga el punto $(1,6)$. Como se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad, dicho teorema garantiza que el PVI tiene solución única en cualquier intervalo abierto con centro en $x = 1$ de la forma $(1-\delta, 1+\delta)$, donde δ es un real positivo.

Ahora estamos listos para comenzar a estudiar los métodos más habituales para resolver EDO de primer orden.

Previo a esto es importante tener claro que, en general, las EDO de primer orden se pueden escribir de las siguientes formas:

1. Notación de Leibniz: $\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad o \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$

2. Notación prima: $y' = f(x, y) \quad o \qquad F(x, y, y') = 0$

3. Notación de Newton por puntos: $\dot{y} = f(x, y) \quad o \quad F(x, y, \dot{y}) = 0$

4. Forma diferencial: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Ejemplo. La EDO de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - 1}$$

Se puede escribir como:

1. $y' = \frac{xy}{x^2-1}$

2. $\dot{y} = \frac{xy}{x^2-1}$

3. $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{x^2-1} = 0$

4. $xydx + (1 - x^2)dy = 0$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES

Definición. Las llamadas **ecuaciones separables**, o **ecuaciones con variables separables**, son aquellas ecuaciones diferenciales que se pueden escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

donde el miembro de la derecha es el producto de dos funciones, cada una dependiente de sólo una de las variables.

En tales circunstancias, podemos separar las variables escribiendo

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

y resolver entonces la ecuación original por integración:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

$$H(y) = F(x) + c$$

en donde $H(y)$ y $F(x)$ son las antiderivadas de $\frac{1}{g(y)}$ y $f(x)$, respectivamente.

En muchos casos, al resolver una EDO de primer orden no podemos despejar la variable dependiente y en forma explícita, y tendremos que conformarnos con hallar una forma implícita de la solución.

La técnica de separación de variables, así como otras técnicas que se analizarán, conlleva la reescritura de una EDO realizando ciertas operaciones algebraicas en ella. Escribir $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ como $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ equivale a dividir ambos lados entre $g(y)$. En este sentido, debemos tomar en cuenta los valores que anulan $g(y)$ en la ecuación separable $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ antes de dividir.

Ejemplo. Resolver la EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{y^2}$$

Solución. Separando variables e integrando obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{y^2}$$

$$\int y^2 dy = \int (1-x^2) dx$$

$$\frac{1}{3} y^3 = x - \frac{1}{3} x^3 + c$$

$$y = \sqrt[3]{3x - x^3 + c_1}, \qquad c_1 = 3c$$

Ejemplo. Resolver el PVI

$$x^2\frac{dy}{dx} = y - xy, \quad y(-1) = -1$$

Solución. Separando variables, integrando y aplicando las propiedades de los logaritmos, obtenemos

$$x^2\frac{dy}{dx} = y - xy$$

$$x^2\frac{dy}{dx} = y(1-x)$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx$$

$$ln|y| = -\frac{1}{x} - ln|x| + c$$

$$ln|xy| = -\frac{1}{x} + c$$

$$|xy| = e^{-\frac{1}{x}+c}$$

$$xy = \pm e^c e^{-\frac{1}{x}}$$

$$y = \frac{c_1}{x}e^{-\frac{1}{x}}, \quad c_1 = \pm e^c$$

Ahora bien, como

$$y(-1) = -1 \Longrightarrow -1 = \frac{c_1}{-1} e^{-\frac{1}{(-1)}} \Rightarrow 1 = c_1 e \Longrightarrow c_1 = e^{-1}$$

Por lo tanto, la solución del PVI es

$$y = \frac{e^{-1}}{x} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$y = \frac{1}{x} e^{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Ejemplo. Resolver la EDO

$$dy + (1 - y^2)dt = 0$$

Solución. Separando variable e integrando obtenemos

$$\int \frac{1}{y^2 - 1} dy = \int dt$$

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \int dt$$

$$\frac{1}{2} (ln|y-1| - ln|y+1|) = t + c$$

Transponiendo $\frac{1}{2}$ y aplicando la propiedades del logaritmo, resulta

$$ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 2t + 2c$$

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{2t+2c}$$

$$\frac{y-1}{y+1} = \pm e^{c}e^{2t}$$

$$\frac{y-1}{y+1} = c_1e^{2t},$$

donde $c_1 = \pm e^{c}$ es una constante. Finalmente, despejando *y* obtenemos

$$y - 1 = (y+1)\, c_1e^{2t}$$

$$y(1 - c_1e^{2t}) = 1 + c_1e^{2t}$$

$$y = \frac{1 + c_1e^{2t}}{1 - c_1e^{2t}}$$

que es una familia uniparamétrica de soluciones de la EDO.

Nótese que al momento de separa variables debemos de considerar que $1-y^2 \neq 0$, esto es, $y \neq 1$ e $y \neq -1$.

Sustituyendo en la EDO $dy+(1-y^2)dt=0$, es inmediato que $y=1$ e $y=-1$ son soluciones de dicha EDO.

Ahora bien, ¿son estas soluciones, miembros de la familia uniparamétrica de soluciones de dicha EDO?

$$y=1 \Longrightarrow \frac{1+c_1e^{2t}}{1-c_1e^{2t}}=1 \Longrightarrow 1+c_1e^{2t}=1-c_1e^{2t}$$

$$\Longrightarrow 2c_1e^{2t}=0 \Longrightarrow c_1=0$$

$$y = -1 \Longrightarrow \frac{1 + c_1 e^{2t}}{1 - c_1 e^{2t}} = -1 \Longrightarrow 1 + c_1 e^{2t} = -1 + c_1 e^{2t} \Longrightarrow 1 = -1$$

Esto es un absurdo

Por lo tanto, la solución $y = 1$ es un miembro de la familia, sin embargo, $y = -1$ no es un miembro de dicha familia, luego, esta última es una solución singular de la EDO.

Ejemplo. Resolver la EDO

$$(e^x + e^{-x})\frac{dy}{dx} = y^2$$

Solución. Separando variables e integrando, obtenemos

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{e^x}{1 + (e^x)^2}\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = arctag(e^x) + c$$

$$y = -\frac{1}{arctag(e^x) + c}$$

$$y = \frac{1}{c_1 - arctag(e^x)},$$

donde $c_1 = -c$ es una constante.

Soluciones que no pueden expresarse en términos de funciones elementales.

Ciertas integrales indefinidas como

$$\int e^{x^2}dx$$

no pueden expresarse en términos finitos utilizando funciones elementales. Al encontrar una integral de este tipo mientras se resuelve una EDO, con frecuencia es útil usar la integración definida. Por ejemplo, consideremos el PVI

$$\frac{dy}{dx} = y^2 e^{x^2}, \qquad y(2) = 1$$

Separamos las variables en la EDO e integramos la ecuación separada de x$= 2$ a $x = x_1$, obteniendo

$$\frac{dy}{y^2} = e^{x^2}dx$$

$$\int_{x=2}^{x=x_1} \frac{dy}{y^2} = \int_{x=2}^{x=x_1} e^{x^2}dx$$

$$-\frac{1}{y(x_1)} + \frac{1}{y(2)} = \int_{x=2}^{x=x_1} e^{x^2}dx$$

Si consideramos a *t* como nueva variable de integración y reemplazamos x_1 por *x* y $y(2)$ por 1, obtenemos

$$-\frac{1}{y(x)} + 1 = \int_2^x e^{t^2}dt$$

Luego, podemos expresar la solución del PVI como

$$y(x) = \left(1 - \int_2^x e^{t^2}dt\right)^{-1}$$

ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Una EDO es lineal de primer orden si se puede escribir de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x),$$

donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $f(x)$ son funciones sólo de *x*, y $a_1(x) \neq 0$.

Hay dos casos donde la solución de una EDO lineal de primer orden es casi inmediata.

Caso 1: $a_0(x) = 0$**.** En este caso la EDO lineal se reduce a

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} = f(x),$$

y separando variables obtenemos

$$y = \int \frac{f(x)}{a_1(x)}dx + c.$$

Caso 2: $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $f(x)$ son constantes *a, b* y *c*, respectivamente. En este caso la EDO lineal se reduce a

$$a\frac{dy}{dx} + by = c,$$

y separando variable obtenemos

$$\int \frac{1}{c - by}\,dy = \int \frac{1}{a}\,dx$$

Caso general. Para resolver la EDO lineal

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x),$$

Primeramente la escribimos como

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Luego, tomando en cuenta que

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int Pdx}y\right) = \frac{d}{dx}\left(\int Pdx\right)e^{\int Pdx}\mathrm{y} + e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx} = e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right),$$

multiplicamos cada miembro de la EDO anterior por $u(x) = e^{\int pdx}$, llamado **factor integrante**, obteniendo

$$e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right) = e^{\int Pdx}Q,$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int Pdx}y\right) = e^{\int Pdx}Q.$$

Ahora bien, por integración se obtiene

$$e^{\int P dx} y = \int e^{\int P dx} Q dx + c$$

Finalmente,

$$y = e^{-\int P dx} \left[\int e^{\int P dx} Q dx + c \right],$$

llamada **solución general** de la EDO lineal

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = f(x).$$

Todo miembro de la familia uniparamétrica obtenida es una solución de la EDO lineal, y toda solución particular de la EDO lineal se puede obtener a partir de dicha familia asignando un valor adecuado de la constante *c*.

Ejemplo. Hallar la solución general de cada EDO

$$x\frac{dy}{dx} - y = x^2 sen\, x$$

Solución.

1. Se escribe la EDO

$$x\frac{dy}{dx} - y = x^2 sen\, x$$

de la forma

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = xsenx \qquad (1)$$

2. Se halla el factor integrante

$$u(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-ln|x|} = \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

3. Se multiplicada cada miembro de la EDO (1) por el factor integrante $u(x)$ y se integra, obteniendo

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = senx$$

$$\frac{1}{x}y = \int senxdx$$

$$\frac{1}{x}y = -cosx + c$$

$$y = x(c - cosx)$$

Ejemplo. Hallar la solución general de cada EDO

$$(1 + x)\frac{dy}{dx} - xy = x + x^2$$

Solución. Escribiendo la EDO

$$(1+x)\frac{dy}{dx} - xy = x + x^2$$

de la forma

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1+x}y = x \qquad (2)$$

se obtiene el factor integrante

$$u(x) = e^{-\int \frac{x}{1+x}dx} = e^{-\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)} = e^{-x+ln|1+x|} = (1+x)e^{-x}, \qquad x > 1$$

Multiplicando cada miembro de la EDO (2) por el factor integrante $u(x)$ y aplicando integración por partes dos veces se obtiene

$$\frac{d}{dx}((1+x)e^{-x}y) = x(`1+x)e^{-x}$$

$$(1+x)e^{-x}y = \int (x^2+x)e^{-x}dx + c$$

$$(1+x)e^{-x}y = -(x^2+x)e^{-x} + \int (2x+1)e^{-x}dx + c$$

$$(1+x)e^{-x}y = -(x^2+x)e^{-x} - (2x+1)e^{-x} + \int 2e^{-x}dx + c$$

$$(1+x)e^{-x}y = -(x^2+x+2x+1+2)e^{-x} + c$$

$$(1+x)e^{-x}y = -(x^2+3x+3)e^{-x} + c$$

$$y = -\frac{x^2+3x+3}{1+x} + \frac{c}{1+x}e^{x}$$

Ejemplo. Hallar una solución continua del PVI

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x), \qquad y(0) = 2,$$

donde $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$

Solución.

1. Hallamos la solución en el intervalo $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{dy}{dx} + y = 1, \quad y(0) = 2,$$

Separando variables e integrando, obtenemos que

$$\int \frac{1}{1-y}\,dy = \int dx$$

$$ln|1-y| = x + c$$

$$1 - y = \pm e^{c} e^{x}$$

$$y = 1 + c_1 e^{x}$$

donde $c_1 = \pm e^{c}$. Aplicado la condición inicial $y(0) = 2$, obtenemos

$$2 = 1 + c_1 e^{0} \Longrightarrow c_1 = 1$$

Por lo tanto, sustituyendo en la familia uniparamétrica

$$y = 1 + e^{x}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

2. Hallamos la solución en el intervalo $x > 1$

$$\frac{dy}{dx} + y = -1$$

Separando variables e integrando, obtenemos que

$$\int \frac{1}{1+y}\,dy = -\int dx$$

$$ln|1 + y| = -x + c$$

$$1 + y = \pm e^{c} e^{-x}$$

$$y = -1 + ke^{x}, \qquad x > 1$$

donde $c_1 = \pm e^c$. El conjunto de todas las soluciones del PVI es

$$y = \begin{cases} y = 1 + e^x, & 0 \leq x \leq 1 \\ y = -1 + ke^x, & x > 1 \end{cases} \tag{3}$$

3. Se pide una solución continua del PVI. Es inmediato que el conjunto de todas las soluciones son continuas en los intervalos $0 \leq x \leq 1$ y $x > 1$, por lo tanto, tenemos que hallar *k* de modo que la solución sea continua en 1.

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} y(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} y(x)$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} (1 + e^x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (-1 + ke^x)$$

$$1 + e = -1 + ke \Longrightarrow ke = 2 + e \Longrightarrow k = 2e^{-1} + 1$$

Finalmente, sustituyen $k = 2e^{-1} + 1$ en (3), obtenemos que la solución continua del PVI es

$$y = \begin{cases} y = 1 + e^{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ y = -1 + (2e^{-1} + 1)e^{x}, & x > 1 \end{cases}$$

o bien,

$$y = \begin{cases} y = 1 + e^{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ y = -1 + 2e^{x-1} + e^{x}, & x > 1 \end{cases}$$

ECUACIONES EXACTAS

Consideremos la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Si existe una función $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

La ecuación diferencia se puede escribir como

$$df = 0$$

o bien,

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

y su solución general es

$$f(x, y) = c$$

Si este es el caso, $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se llama una **ecuación diferencial exacta.**

Ejemplo. La EDO

$$ydx + xdy = 0$$

es exacta, en efecto, existe

$$f(x, y) = xy$$

tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Por lo tanto, la solución general de dicha EDO es

$$xy = c$$

Ejemplo. La EDO

$$\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

es exacta, en efecto, existe

$$f(x,y) = \frac{x}{y}$$

tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

Por lo tanto, la solución general de dicha EDO es

$$\frac{x}{y} = c$$

Teorema (Criterio de exactitud). Supongamos que las funciones $M(x,y)$, $N(x,y)$ y sus primeras derivadas parciales son continuas en una región rectangular $\mathcal{R} \subset R^2$.
Entonces, la condición necesaria y suficiente para que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

sea una ecuación diferencial exacta es que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

para toda (x,y) en $\mathcal{R}$.

Ejemplo. Demuestre que la EDO

$$(1+\ln y)dx+\frac{x}{y}dy=0$$

es exacta y resuélvala.

Solución.

$$\left.\begin{array}{r} M(x,y)=1+\ln y \Longrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{1}{y} \\ N(x,y)=\dfrac{x}{y} \Longrightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{1}{y} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Para toda (x,y) en un rectángulo contenido en el semiplano $y>0$. Nótese que en dicho rectángulo M,N y sus parciales son continuas.

Por lo tanto, por el criterio de exactitud, la EDO

$$(1+\ln y)dx+\frac{x}{y}dy=0$$

es exacta, luego, existe una función $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = 1 + \ln y \quad (4) \qquad\qquad y \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N = \frac{x}{y} \quad (5)$$

Por (4), obtenemos que

$$f(x,y) = \int (1 + \ln y)dx + g(y) = x + x\ln y + g(y) \qquad (6)$$

Donde $g(y)$ es una función que sólo depende de *y.* Esta función se escogerá de modo que se satisfaga la condición (5).

Por (5) y (6), obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial y}(x + x\ln y + g(y)) = \frac{x}{y}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{d}{dy}g(y) = \frac{x}{y}$$

$$\frac{d}{dy}g(y) = 0 \Longrightarrow g(y) = k,$$

donde *k* es una constante real.

Ahora bien, sustituyendo $g(y) = k$ en (6), obtenemos

$$f(x, y) = x + x\ln y + k$$

Por lo tanto, la solución general de la EDO es

$$f(x, y) = c$$

$$x + x \ln y + k = \mathrm{c}$$

$$x + x \ln y = c_1 \,,$$

donde $c_1 = c - k$ es una constante real

Ejercicio. Resolver el PVI

$$\left(ye^{xy} - \frac{1}{y}\right) dx + \left(xe^{xy} + \frac{x}{y^2}\right) dy = 0, \qquad y(1) = 1$$

Solución.

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) = ye^{xy} - \frac{1}{y} \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = (1+xy)e^{xy} + \frac{1}{y^2} \\ N(x,y) = xe^{xy} + \frac{x}{y^2} \Longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = (1+xy)e^{xy} + \frac{1}{y^2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por lo tanto, por el criterio de exactitud, la EDO es exacta, luego, existe una función $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = ye^{xy} - \frac{1}{y} \quad (7) \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N = xe^{xy} + \frac{x}{y^2} \quad (8)$$

Por (7), obtenemos que

$$f(x,y) = \int \left(ye^{xy} - \frac{1}{y}\right) dx + g(y) = e^{xy} - \frac{x}{y} + g(y) \qquad (9)$$

Por (8) y (9)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy} - \frac{x}{y} + g(y)\right) = xe^{xy} + \frac{x}{y^2}$$

$$xe^{xy} + \frac{x}{y^2} + g'(y) = xe^{xy} + \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{d}{dy} g(y) = 0 \Longrightarrow g(y) = k,$$

donde *k* es una constante real.

Sustituyendo $g(y) = k$ en (9), obtenemos

$$f(x,y) = e^{xy} - \frac{x}{y} + k$$

Por lo tanto, la solución general de la EDO es

$$e^{xy} - \frac{x}{y} = c$$

Como

$$y(1) = 1 \Rightarrow e^{1\cdot 1} - \frac{1}{1} = c \Longrightarrow c = e - 1$$

Luego, la solución del PVI es

$$e^{xy} - \frac{x}{y} - e + 1 = 0$$

FACTORES INTEGRANTES DEPENDIENDO DE UNA VARIABLE

Si la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{10}$$

No es exacta, pero la ecuación

$$u(x,y)M(x,y)dx + u(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{11}$$

Si es exacta, entonces $u(x,y)$ es un **factor integrante** de la ecuación (10).

Como la ecuación (11) es exacta, entonces

$$\frac{\partial(uM)}{\partial y} = \frac{\partial(uN)}{\partial x}$$

$$M\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M\frac{\partial u}{\partial y} - N\frac{\partial u}{\partial x} = u\frac{\partial N}{\partial x} - u\frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{1}{u}\left(M\frac{\partial u}{\partial y} - N\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \qquad (12)$$

CASO 1: $u = u(x)$, esto es, *u* depende sólo de *x.*

En este caso la ecuación (12) se reduce a

$$\frac{1}{u}\left(-N\frac{du}{dx}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = g(x)$$

Separando variables e integrando, obtenemos que

$$\int \frac{1}{u} du = \int g(x)dx$$

$$\ln u = \int g(x)dx$$

$$u = u(x) = e^{\int g(x)dx} \qquad (13)$$

Este razonamiento es reversible, si la expresión $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ es función sólo de *x*, digamos $g(x)$, entonces (13) es un factor integrante para la EDO (10).

CASO 2: $u = u(y)$, esto es, *u* depende sólo de *y.*

Un razonamiento análogo proporciona el siguiente resultado: Si

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M} = h(y),$$

entonces,

$$u = u(y) = e^{\int h(y)dy}$$

es un factor integrante para la EDO (10).

Resumen del método para hallar factores integrantes especiales.

Si nos piden resolver la EDO

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

procedemos de la siguiente forma:

1. Si no es separable ni lineal, calculamos $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$.

2. Si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, entonces la EDO es exacta, luego, aplicamos el método para resolver EDO exactas.

3. Si la EDO no es exacta, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, consideramos la expresión

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

Si sólo depende de *x,* digamos $g(x)$, entonces un factor integrante está dado por

$$u(x) = e^{\int g(x)dx}$$

4. En caso contrario, consideramos la expresión

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

Si sólo depende de *y,* digamos $h(y)$, entonces un factor integrante está dado por

$$u(y) = e^{\int h(y)dy}$$

Ejemplo. Demuestre que la siguiente EDO no es exacta, halle un factor integrante y resuélvala.

$$(y\ln y - 2xy)dx + (x + y)dy = 0$$

Solución.

$$M = y\ln y - 2xy \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \ln y + y\cdot\frac{1}{y} - 2x = \ln y + 1 - 2x$$

N$= x + y \Longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 1$

Por lo tanto,

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \Longrightarrow$ La EDO no es exacta.

Veamos si existe un factor integrante con respecto a *x.*

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{(\ln y+1-2x)-1}{x+y}=\frac{\ln y-2x}{x+y}$$

La expresión anterior no depende de *x*, por lo tanto, no existe un factor integrante con respecto a *x*.

Veamos si existe un factor integrante con respecto a *y*.

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{1-(\ln y+1-2x)}{y\ln y-2xy}=\frac{2x-\ln y}{-y(2x-\ln y)}=-\frac{1}{y}$$

La expresión anterior depende de *y*, por lo tanto existe un factor integrante con respecto a *y:*

$$u = u(y) = e^{-\int \frac{1}{y} dy} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}, \qquad y > 0$$

Multiplicando cada miembro de la EDO considerada, por este factor integrante, obtenemos

$$\frac{1}{y}(y \ln y - 2xy)dx + \frac{1}{y}(x + y)dy = 0$$

$$(\ln y - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} + 1\right)dy = 0$$

Esta nueva EDO es exacta, en efecto

$$\left.\begin{aligned} M = \ln y - 2x \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{y} \\ N = \frac{x}{y} + 1 \Longrightarrow \frac{\delta N}{\delta x} = \frac{1}{y} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\delta N}{\delta x}$$

Por lo tanto, existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln y - 2x \qquad (14) \qquad\qquad y \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} + 1 \qquad (15)$$

Por (14),

$$f(x, y) = \int (\ln y - 2x)dx + g(y) = x\, lny - x^2 + g(y) \qquad (16)$$

Por (15) y (16),

$$\frac{\partial}{\partial y}(x\ lny - x^2 + g(y)) = \frac{x}{y} + 1$$

$$\frac{x}{y} + g'(y) = \frac{x}{y} + 1$$

$$g'(y) = 1$$

$$g(y) = y, \tag{17}$$

Finalmente, por (16) y (17) obtenemos que la solución general de la EDO original es

$$x\ lny - x^2 + y = c$$

Ejemplo. Resuelva la siguiente EDO hallando un factor integrante

$$(x+2)sen\, y\, dx + x\cos y\, dy = 0$$

Solución

$$\begin{cases} M = (x+2)seny \Longrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = (x+2)cosy \\ N = xcosy \Longrightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = cosy \end{cases} \Longrightarrow La\ EDO\ no\ es\ exacta$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{(x+2-1)cosy}{xcosy} = \frac{x+1}{x}$$

Luego, existe un factor integrante que depende de x.

$$u(x) = e^{\int \frac{x+1}{x} dx} = e^{x+lnx} = xe^x, \qquad x > 0$$

Multiplicando cada miembro de la EDO original por $u(x)$ obtenemos

$$(x^2 + 2x)e^x senydx + x^2 e^x cosydy = 0$$

Nótese que

$$\begin{cases} M = (x^2 + 2x)e^x seny \\ N = x^2 e^x cosy \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = (x^2 + 2x)e^x cosy$$

Luego, la EDO anterior es exacta. Se sigue que existe una función $f(x, y)$ tal que

$f_x(x,y) = (x^2 + 2x)e^x seny \quad (18) \qquad\qquad y \qquad\qquad f_y(x,y) = x^2 e^x cosy \quad (19)$

Por (19)

$$f(x,y) = \int x^2 e^x cosydy + g(x) = x^2 e^x seny + g(x) \qquad (20)$$

Por (18) y (20)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 e^x seny + g(x)\right) = (x^2 + 2x)e^x seny$$

$$(x^2 + 2x)e^x seny + g'(x) = (x^2 + 2x)e^x seny$$

$$g'(x) = 0 \Longrightarrow g(x) = k$$

Sustituyendo en (20) se obtiene que

$$f(x,y) = x^2 e^x seny + k$$

Por lo tanto, la solución general de la EDO original es

$$x^2 e^x seny + k = \mathrm{c}$$

$$x^2 e^x seny = c_1$$

donde $c_1 = c - k$ es una constante.

SUSTITUCIONES Y TRANSFORMACIONES

Ecuaciones homogéneas

Definición. Una función $f(x, y)$ es **homogénea** de grado *n* si

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

para todos los *x, y, t* convenientemente restringidos.

Ejemplo. $f(x, y) = 3xy^2 - x^3 + 7y^3$ es homogénea de grado 3, en efecto,

$$f(tx, ty) = 3(tx)(ty)^2 - (tx)^3 + 7(ty)^3$$

$$= 3t^3xy^2 - t^3x^3 + 7t^3y^3$$

$$= t^3(3xy^2 - x^3 + 7y^3) = t^3 f(x, y)$$

Ejemplo. $f(x,y)=\frac{x-\sqrt{x^2+4y^2}}{\mathrm{y}(\ln x-\ln y)}$ es homogénea de grado 0, en efecto

$$f(tx,ty)=\frac{tx-\sqrt{(tx)^2+4(ty)^2}}{(ty)(\ln(tx)-\ln(ty))}$$

$$=\frac{tx-\sqrt{t^2(x^2+4y^2)}}{ty\ln\frac{tx}{ty}}$$

$$=\frac{t\left(x-\sqrt{x^2+4y^2}\right)}{ty\ln\frac{x}{y}}$$

$$=\frac{x-\sqrt{x^2+4y^2}}{\mathrm{y}(\ln x-\ln y)}=t^0f(x,y)$$

Definición. Diremos que la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Es **homogénea** si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado.

La EDO anterior se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

donde $f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ es homogénea de grado cero.

Método para resolver una EDO homogénea

Sea

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{21}$$

una EDO homogénea.

Haciendo el cambio de variable $y = ux$ y tomando en cuenta que $f(x, y)$ es una función homogénea de grado cero, obtenemos que

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

y

$$f(x, y) = f(x, ux) = x^0 f(1, u) = f(1, u)$$

Por lo tanto, sustituyendo en la EDO (21) nos queda que

$$x\frac{du}{dx} + u = f(1, u)$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{1}{f(1,u)-u}du = \frac{1}{x}dx$$

Integrando y reemplazando *u* por $\frac{y}{x}$ conseguimos la solución de la EDO (21).

En resumen, la sustitución $y = ux$ transforma la EDO (1) en una EDO de variables separables.

Ejemplo. Compruebe que la siguiente EDO es homogénea y resuélvala.

$$x^2y' = 3(x^2+y^2)arctag\,\frac{y}{x} + xy$$

Solución. La EDO se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x^2+y^2)arctag\,\frac{y}{x} + xy}{x^2}$$

Demuestren ustedes que el segundo miembro de la ecuación es una función homogénea de grado cero.

Haciendo la sustitución $y = ux$, obtenemos que

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{3(x^2 + (ux)^2)arctag\ \frac{ux}{x} + x(\mathrm{ux})}{x^2}$$

$$x\frac{du}{dx} = 3(1 + u^2)arctag\ u + u - \mathrm{u}$$

Separando variables e integrando

$$\int \frac{1}{(1 + u^2)arctag\ u}du = \int \frac{3}{x}dx$$

$$\ln|arctag\ u| = 3\ln|x| + \ln c$$

$$\ln|arctag\, u| = 3\ln|x| + \ln c$$

$$\ln|arctag\, u| = \ln c|x|^3$$

$$|arctag\, u| = c|x|^3$$

$$arctag\, u = c_1 x^3, \qquad c_1 = \pm c$$

$$arctag\, \frac{y}{x} = c_1 x^3$$

$$\boxed{y = xtag(c_1 x^3)}$$

que es la solución de la EDO homogénea.

Ecuaciones de Bernoulli

Toda EDO que se pueda escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{22}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en un intervalo abierto (a, b) y n es un número real, la llamaremos **ecuación de Bernoulli.**

Nótese que cuando $n = 0$ o $n = 1$, la ecuación de Bernoulli es una ecuación lineal.

Para otros valores de *n,* la sustitución $u = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal.

Multiplicado cada miembro de la ecuación (22) por y^{-n} obtenemos que

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \tag{23}$$

Ahora bien, como $u = y^{1-n}$, entonces

$$\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Por lo tanto, sustituyendo en (23) obtenemos

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx} + P(x)u = Q(x),$$

que claramente es una EDO lineal.

Ejemplo. Resuelva el PVI

$$x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4, \qquad y(1) = \frac{1}{2}$$

Solución. Se trata de una EDO de Bernoulli. Multiplicando cada miembro de dicha EDO por $\frac{y^{-4}}{x^2}$, obtenemos

$$y^{-4}\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y^{-3}=\frac{3}{x^2}$$

Usando la sustitución $u=y^{-3}$, como $\frac{du}{dx}=-3y^{-4}\frac{dy}{dx}$, la EDO anterior se puede escribir como

$$-\frac{1}{3}\frac{du}{dx}-\frac{2}{x}u=\frac{3}{x^2}$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{6}{x}u=-\frac{9}{x^2},$$

que claramente es una EDO lineal de factor integrante

$$u = e^{\int \frac{6}{x} dx} = e^{6 \ln|x|} = x^6$$

Por lo tanto, multiplicando cada miembro de la EDO por dicho factor integrante obtenemos

$$\frac{d}{dx}(x^6 u) = -9x^4$$

Integrando

$$x^6 u = -\frac{9}{5} x^5 + c$$

Despejando *u*

$$u = -\frac{9}{5x} + \frac{c}{x^6} \Longrightarrow y^{-3} = -\frac{9}{5x} + \frac{c}{x^6}$$

Usando la condición inicial $y(1) = \frac{1}{2}$, obtenemos que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -\frac{9}{5} + c \Longrightarrow c = 8 + \frac{9}{5} = \frac{49}{5}$$

Por lo tanto, la solución del PVI es

$$y^{-3} = -\frac{9}{5x} + \frac{49}{5x^6} = \frac{49 - 9x^5}{5x^6} \Longrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{5x^6}{49 - 9x^5}}$$

Ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} = g(ax + by)$.

Si la EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(ax + by), \tag{24}$$

donde a y b son constantes reales, la sustitución $u = ax + by$ la transforma en una EDO de variables separables.

$$u = ax + by \Longrightarrow \frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right)$$

Por lo tanto, sustituyen en (24) obtenemos la EDO

$$\frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right) = \mathrm{g(u)},$$

que claramente es de variables separables.

Ejercicios. Resolver la EDO

$$y' = sen^2(x - y + 1)$$

Solución.

$$u = x - y + 1 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{du}{dx}$$

Por lo tanto, sustituyendo en la EDO, separando variables e integrado, obtenemos

$$1-\frac{du}{dx}=sen^2u$$

$$\int\frac{1}{1-sen^2u}du=\int dx$$

$$\int\frac{1}{cos^2u}du=\int dx$$

$$tagu=x+c$$

$$tag(x-y+1)=x+c$$

$$x-y+1=arctag(x+c)$$

$$y=x+1-arctag(x+c)$$

Ecuaciones con coeficientes lineales

Las **ecuaciones con coeficientes lineales** son ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \qquad (25)$$

donde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ son constantes reales.

Si $a_1b_2 = b_1a_2$, la ecuación (25) la podemos escribir de la forma $\frac{dy}{dx} = g(ax + by)$, que la resolvemos con la sustitución $u = ax + by$.

Si $a_1b_2 \neq b_1a_2$, las sustituciones

$$x = u + h \qquad y \qquad y = v + k$$

donde *h* y *k* son soluciones del sistema

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases}$$

transforman la ecuación (25) en la ecuación homogénea

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}$$

Ejemplo. Resolver la EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y - 6}$$

Solución. Considerando la sustitución

$$x = u + h \qquad y \qquad y = v + k$$

la EDO se puede escribir como

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + h + v + k}{u + h - (v + k) - 6}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + v + h + k}{u - v + h - k - 6} \tag{26}$$

Como *h* y *k* son soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{r} h + k = 0 \\ h - k - 6 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow h = 3 \quad \wedge \quad k = -3$$

Sustituyendo estos valores en (26) obtenemos

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v}$$

que es una EDO homogénea. Por lo tanto, usando la sustitución $v = zu$, la EDO la podemos escribir como como

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$u\frac{dz}{du} = \frac{1+z^2}{1-z}$$

Separando variables e integrando obtenemos

$$\int \frac{1-z}{1+z^2}\,dz = \int \frac{1}{u}\,du$$

$$arctag\, z - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln|u| + c$$

$$\ln\left|u\sqrt{1+z^2}\right| = arctag\, z - c$$

$$u\sqrt{1+z^2} = c_1 e^{arctag\, z}, \qquad c_1 = \pm e^{-c}$$

Ahora bien, como $\left.\begin{array}{r} z = \frac{v}{u} \\ x = u + 3 \\ y = v - 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} z = \frac{y+3}{x-3} \\ u = x - 3 \end{array}\right\}$

Por lo tanto, la solución de la EDO es

$$(x-3)\quad\sqrt{1+\left(\frac{y+3}{x-3}\right)^2} = c_1 e^{arctag\,\frac{y+3}{x-3}}$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2} = c_1 e^{arctag\,\frac{y+3}{x-3}}, \qquad x-3>0$$

MODELOS MATEMÁTICOS

El proceso de imitación de la realidad mediante el lenguaje de las matemáticas se conoce como **modelación matemática**.

El proceso de modelación de un problema incluye lo siguiente

- Formulación de un problema del mundo real en términos matemáticos.
- Análisis o solución del problema matemático resultante.
- Interpretación de los resultados matemáticos en el contexto original de la situación del mundo real

Dos requisitos contradictorios de un modelo matemático

1. Debe ser suficientemente detallado para responder la situación del mundo real con relativa exactitud.

2. debe ser lo suficientemente sencillo para hacer práctico el análisis matemático.

Crecimiento y decaimiento

Uno de los modelos para modelar el crecimiento y decrecimiento de una población se basa en la siguiente hipótesis:
la tasa de crecimiento de una población crece en forma proporcional a la población total $P(t)$, en cualquier momento t.

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

donde k es una constante de proporcionalidad. En este modelo se puede notar que en el caso del crecimiento $k > 0$, y en el caso del decaimiento o desintegración $k < 0$.

Problema 1. Se sabe que la población de una cierta comunidad aumenta con una razón proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento. Si la población se duplicó en cinco años, ¿en cuánto tiempo se triplicará y cuadruplicará?

Solución.

Sea n_0 la cantidad inicial de personas y $P(t)$ la cantidad de personas en cada tiempo t. Como la población aumenta con una razón proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento, el *PVI* que modela el problema es

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(0) = n_0 \tag{27}$$

Separando variables e integrando obtenemos

$$\int \frac{1}{P}\,dP = \int k\,dt$$

$$\ln P = kt + C, \qquad P > 0$$

$$P(t) = C_1 e^{kt}, \qquad C_1 = e^{C}$$

Como $P(0) = n_0$, entonces

$$C_1 e^{k(0)} = n_0 \Longrightarrow C_1 = n_0 \Longrightarrow P(t) = n_0 e^{kt}$$

Para hallar la constante de proporcionalidad *k*, tomamos en cuenta que la población se duplicó en cinco años, estos es, $P(5) = 2n_0$. Por consiguiente

$$n_0 e^{5k} = 2n_0 \Longrightarrow e^{5k} = 2 \Longrightarrow 5k = \ln 2 \Longrightarrow k = \frac{1}{5}\ln 2 = 0{,}13863$$

Por lo tanto, la población en cada tiempo *t* es

$$P(t) = n_0 e^{0{,}13863t}$$

Sea t el tiempo en que la población se triplicará, entonces

$$P(t) = 3n_0 \Longrightarrow n_0 e^{0,13863t} = 3n_0 \Longrightarrow e^{0,13863t} = 3$$

$$\Longrightarrow 0,13863t = \ln 3 \Longrightarrow t = \frac{1}{0,13863}\ln 3 = 7,9247$$

Sea t el tiempo en que la población se cuadruplicará, entonces

$$P(t) = 4n_0 \Longrightarrow n_0 e^{0,13863t} = 4n_0 \Longrightarrow e^{0,13863t} = 4$$

$$\Longrightarrow 0,13863t = \ln 4 \Longrightarrow t = \frac{1}{0,13863}\ln 4 = 9,999959$$

Por lo tanto, la población se triplicará en 7,9 años y se cuadruplicará en 10 años.

Problema 2. En 1980, el Departamento de Recursos Naturales liberó cierta cantidad de ejemplares de una especie de pez en un lago. En los años 1987 y 2010 la población de estos peces en el lago se estimo, respectivamente, en 3000 y 7000. Suponga que el crecimiento de estos peces es proporcional a la cantidad de peces que existe en cada tiempo *t* y estime la cantidad de peces que el Departamento de Recursos Naturales liberó.

Solución. Sea *P(t)* la cantidad de peces en cada tiempo t . Supongamos que el Departamento de Recursos naturales liberó n_0 ejemplares
de una especie de pez cuando $t = 0$ (en 1980), entonces como el crecimiento de estos peces es proporcional a la cantidad de peces que existe en cada tiempo *t,* el *PVI* que modela el problema es

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(0) = n_0$$

En forma análoga como en el ejemplo anterior, obtenemos que la solución del *PVI* es

$$P(t) = n_0 e^{kt}$$

Como en los años 1987 y 2010 la población de estos peces en el lago se estimo, respectivamente, en 3000 y 7000, y cuando $t = 0$ estamos en el año 1980, entonces

$$P(7) = 3000 \quad y \quad P(30) = 7000.$$

Por lo tanto, sustituyendo en la solución del *PVI* obtenemos el sistema

$$\begin{cases} n_0 e^{7k} = 3000 \\ n_0 e^{30k} = 7000 \end{cases}$$

Despejando n_0 en cada una de las ecuaciones e igualando obtenemos

$$3000e^{-7k} = 7000e^{-30k} \Longrightarrow \frac{e^{-7k}}{e^{-30k}} = \frac{7000}{3000} \Longrightarrow e^{23k} = \frac{7}{3}$$

$$\Longrightarrow k = \frac{1}{23}\ln\frac{7}{3} \Longrightarrow k = 0{,}037$$

Luego, sustituyendo en la primera ecuación considerada en el sistema obtenemos que

$$n_0 e^{7(0{,}037)} = 3000 \Longrightarrow n_0 = 3000e^{-7(0{,}037)} = 2315{,}46$$

Por lo tanto, se estima que la cantidad de peces que el Departamento de Recursos Naturales liberó fue de 2315.

Crecimiento logístico.

Si $p(t)$ denota el tamaño de una `población en el tiempo $t,$ el modelo para calcular el crecimiento de la población comienza con el supuesto de que

$$\frac{dp}{dt} = kp, \qquad k > 0$$

Este modelo predice que una población crecerá exponencial con el tiempo. Habitualmente ésta no es la realidad, el crecimiento poblacional depende de muchos factores del tiempo, espacio, aire, alimento,… .

El modelo anterior se llama modelo de crecimiento irrestricto, mientras que el modelo que presentaremos a continuación se llama modelo de crecimiento con restricciones.
Este modelo, llamado de **crecimiento logístico,** fue introducido por Pierre Francois en 1838, y *supone que la razón de crecimiento es proporcional tanto a la población misma como a la cantidad faltante para llegar a la máxima población sustentable.*

$$\frac{dp}{dt} = rp\left(1 - \frac{p}{k}\right) \quad o \quad \frac{dp}{dt} = \frac{r}{k}p(k-p)$$

Donde *r* se conoce como la razón de crecimiento intrínseco y *k* es la capacidad sustentable o máximo valor que puede tener *p.*

El valor de *r* depende sólo de la especie considerada, mientras que *k* depende tanto de la especie como del ambiente donde se desarrolla ésta.

Nótese que si *p* es muy pequeño comparado con *k*, entonces $1 - \frac{p}{k} \approx 1$ y el modelo es semejante al modelo irrestricto. Por otro lado, si *p* se aproxima a *k,* entonces $1 - \frac{p}{k} \approx 0$ y esto haría que $\frac{dp}{dt} \approx 0$**,** en consecuencia la población sería casi constante.

Podemos resolver la ecuación logística, separando variables e integrando,

$$\int \frac{1}{p(k-p)}dp = \int \frac{r}{k}dt$$

$$\frac{1}{k}\int \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{k-p}\right)dp = \frac{r}{k}t + c$$

$$ln\left|\frac{p}{k-p}\right| = rt + ck$$

$$\frac{p}{k-p} = c_1 e^{rt}, \qquad c_1 = \pm e^{ck}$$

$$p(1 + c_1 e^{rt}) = c_1 k e^{rt}$$

$$p(t) = \frac{c_1 k e^{rt}}{1 + c_1 e^{rt}}$$

Problema 3. Suponga que un estudiante portador de un virus ingresa a una comunidad universitaria aislada cuya población es de 1000 individuos. Si se supone que la tasa a la cual el virus se propaga es proporcional no sólo al número *p* de estudiantes infectados sino también al número de estudiantes no infectados, determine el número de estudiantes infectados después de 6 días suponiendo que pasados 4 días $p(4) = 50$ y que nadie abandona la comunidad universitaria durante la enfermedad.

Solución. El PVI que modela el problema es

$$\frac{dp}{dt} = \frac{r}{1000}p(1000 - p), \qquad p(0) = 1$$

Por lo tanto

$$p(t) = \frac{1000c_1 e^{rt}}{1 + c_1 e^{rt}}$$

Usando la condición inicial $p(0) = 1$ y la condición adicional $p(4) = 50$ obtenemos el valor de las constantes c_1 y r.

$$p(0) = 1 \Longrightarrow 1 = \frac{1000c_1}{1 + c_1} \Longrightarrow 1 + c_1 = 1000c_1 \Longrightarrow c_1 = \frac{1}{999}$$

$$p(4) = 50 \Longrightarrow 50 = \frac{\frac{1000}{999}e^{4r}}{1 + \frac{1}{999}e^{4r}} \Longrightarrow 50 = \frac{1000e^{4r}}{999 + e^{4r}}$$

$$\Longrightarrow 49950 + 50e^{4r} = 1000e^{4r} \Longrightarrow 950e^{4r} = 49950$$

$$\Longrightarrow e^{4r} = \frac{999}{19} \Longrightarrow r = \frac{1}{4} ln \frac{999}{19} = 0{,}991$$

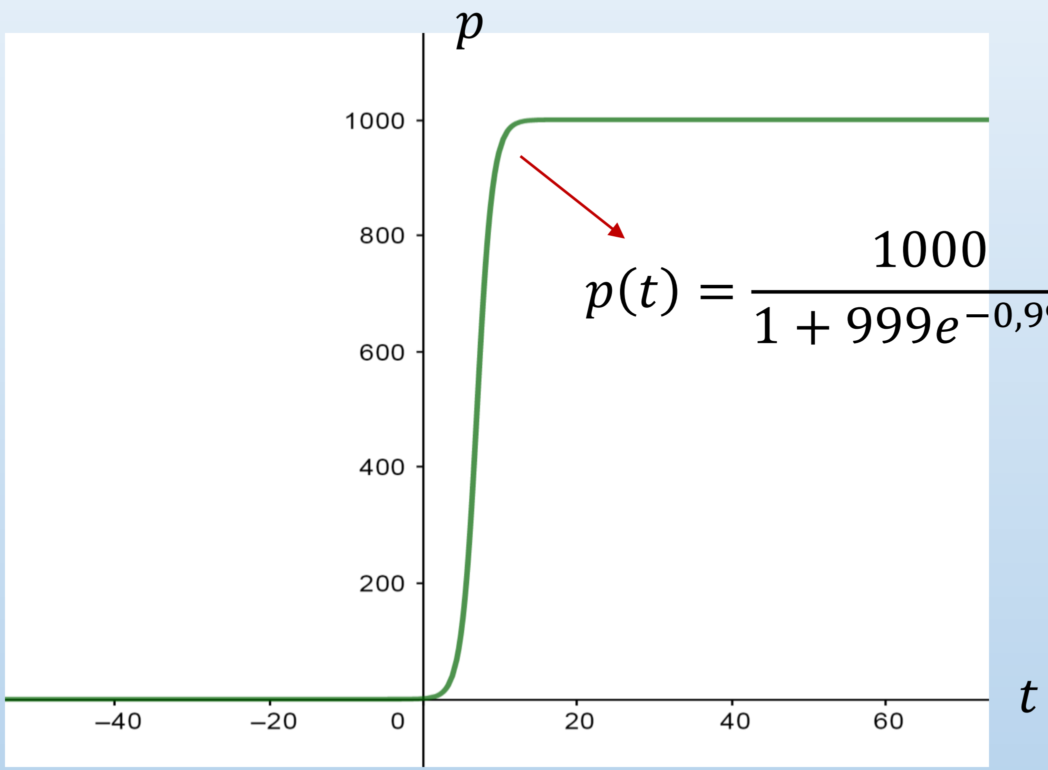
Por lo tanto

$$p(t) = \frac{\frac{1000}{999}e^{0{,}991t}}{1 + \frac{1}{999}e^{0{,}991t}} = \frac{1000e^{0{,}991t}}{999 + e^{0{,}991t}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-0{,}991t}}$$

Luego, después de 6 días, el número de estudiantes infectados es

$$p(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0{,}991(6)}} = 277$$

A continuación mostramos la representación gráfica de *p(t)*

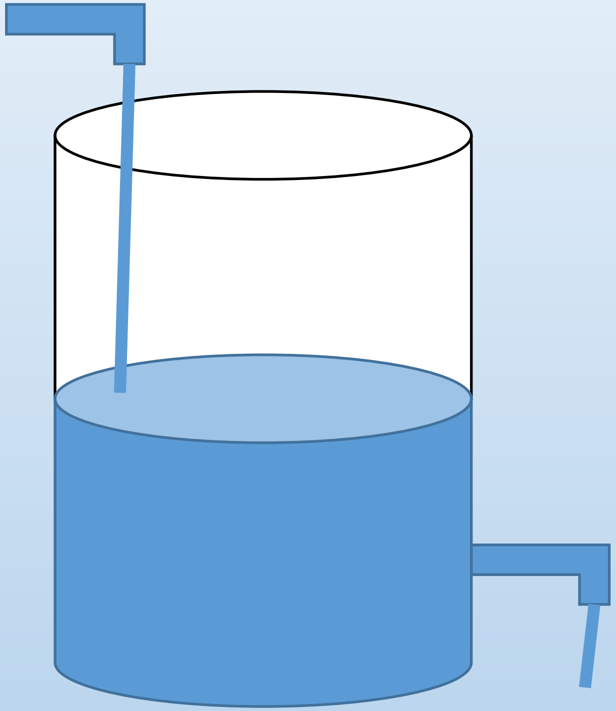


$$p(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0{,}991t}}$$

Mezclas

Sea *A(t)* la cantidad de sal en un tanque en cualquier momento t, R_1 la razón con que la sal entra al tanque, y R_2 la razón con que la sal sale del tanque.

Razón de entrada



Razón de salida

En este caso

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2$$

En estos problemas con frecuencia se tiene la razón con la que entra al tanque un fluido que contiene sal, junto con la concentración de sal en ese fluido. Por lo tanto, al multiplicar la razón del flujo (volumen/tiempo) por la concentración (cantidad/volumen) se obtiene la razón de entrada (cantidad/tiempo).

En general, la razón de salida de la sal es más difícil de determinar. Si nos dan el flujo de salida en el tanque, para determinar la concentración de la sal en ese flujo suponemos que ésta se mantiene uniforme en la mezcla. Entonces, podemos calcular la concentración de sal en la mezcla, dividiendo la cantidad de sal *A(t)* entre el volumen de la mezcla en el tanque en el instante *t*. Al multiplicar esta concentración por el flujo de salida se obtiene la razón de salida de la sal.

Ejemplo. Un tanque tiene $500\ gal$. de agua pura y le entra salmuera con $2\ lb$. de sal por galón a un flujo de $5\ gal/\min$.. El tanque está bien mezclado y sale de él solución a un flujo de 10 gal/min. Calcule la cantidad de libras de sal que hay en el tanque en cualquier momento t. ¿Cuándo se vacía el tanque?

Solución.

La razón de entrada es

$$R_1 = (Razón\ de\ flujo)(Concentración)$$

$$= \left(5\,\frac{gal}{min}\right)\left(2\,\frac{lb}{gal}\right) = 10\,\frac{lb}{min}$$

La razón de salida es

$$R_1 = (Razón\ de\ flujo)(Concentración)$$

$$= \left(10\,\frac{gal}{min}\right)\left(\frac{A}{500-5t}\,\frac{lb}{gal}\right) = \frac{2A}{100-t}\,\frac{lb}{min}$$

Como inicialmente el tanque tiene $100\ lb$. de agua pura, entonces $A(0) = 0$. Por lo tanto, el PVI que modela el problema es

$$\frac{dA}{dt} = 10 - \frac{2A}{100-t}, \qquad \mathrm{A}(0) = 0.$$

Tenemos una EDO lineal

$$\frac{dA}{dt} + \frac{2}{100-t}A = 10$$

cuyo factor integrante es

$$e^{\int \frac{2}{100-t}dt} = e^{-2ln|100-t|} = \frac{1}{(100-t)^2}$$

Por lo tanto, multiplicado cada miembro de la EDO por dicho factor integrante e integrando obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(100-t)^2}A\right) = 10\,\frac{1}{(100-t)^2}$$

$$\frac{1}{(100-t)^2}A = \mathrm{C} + \frac{10}{100-t}$$

$$A(t) = C(100-t)^2 + 10(100-t)$$

Como $A(0) = 0$, entonces

$$C(100-0)^2 + 10(100-0) = 0 \Longrightarrow 100^2C = -1000 \Longrightarrow C = -\frac{1}{10}$$

Por lo tanto, la cantidad de sal en el tanque en cada tiempo t es

$$A(t) = 10(100-t) - \frac{(100-t)^2}{10}$$

El tanque se vacía cuando $500 - 5t = 0$; esto es, cuando $t = 100$.

Ejemplo. En un gran tanque con $1000\ lit.$ de agua pura se comienza a verter una solución salina a una razón constante de $6\ lit/min$. La solución dentro del tanque se mantiene bien revuelta y sale a razón de $6\ lit/min$. Si la concentración de sal en la solución que entra al tanque es de $0{,}1\ kg/lit$., determine el momento en que la concentración de sal en el tanque llegará a $0{,}05\ kg/lit$.

Solución.

La razón de entrada de sal es

$$R_1 = \left(6\frac{lit}{min}\right)\left(0{,}1\frac{kg}{lit}\right) = \frac{3}{5}\frac{kg}{min}$$

y la razón de salida

$$R_2 = \left(6\frac{lit}{min}\right)\left(\frac{A}{1000}\frac{kg}{lit}\right) = \frac{3A}{500}\frac{kg}{min}$$

Luego, el PVI que modela el problema es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{3}{5} - \frac{3A}{500}, \qquad A(0) = 0$$

Separando variables e integrando obtenemos que

$$\int \frac{1}{100 - A}\,dA = \int \frac{3}{500}\,dt$$

$$-ln|100 - A| = \frac{3}{500}t + C$$

$$100 - A = C_1 e^{-\frac{3}{500}t}$$

$$A(t) = 100 - C_1 e^{-\frac{3}{500}t}$$

Como

$$A(0) = 0 \Longrightarrow 100 - C_1 e^{-\frac{3}{500}(0)} = 0 \Longrightarrow C_1 = 100$$

Por lo tanto, la solución del PVI es

$$A(t) = 100 - 100e^{-\frac{3}{500}t}$$

Sea t el momento en que la concentración de sal en el tanque llegará a $0{,}05\, kig/lit$., entonces

$$\frac{A(t)}{1000} = 0{,}05 \Longrightarrow A(t) = 50$$

Esto es,

$$100-100e^{-\frac{3}{500}t}=50$$

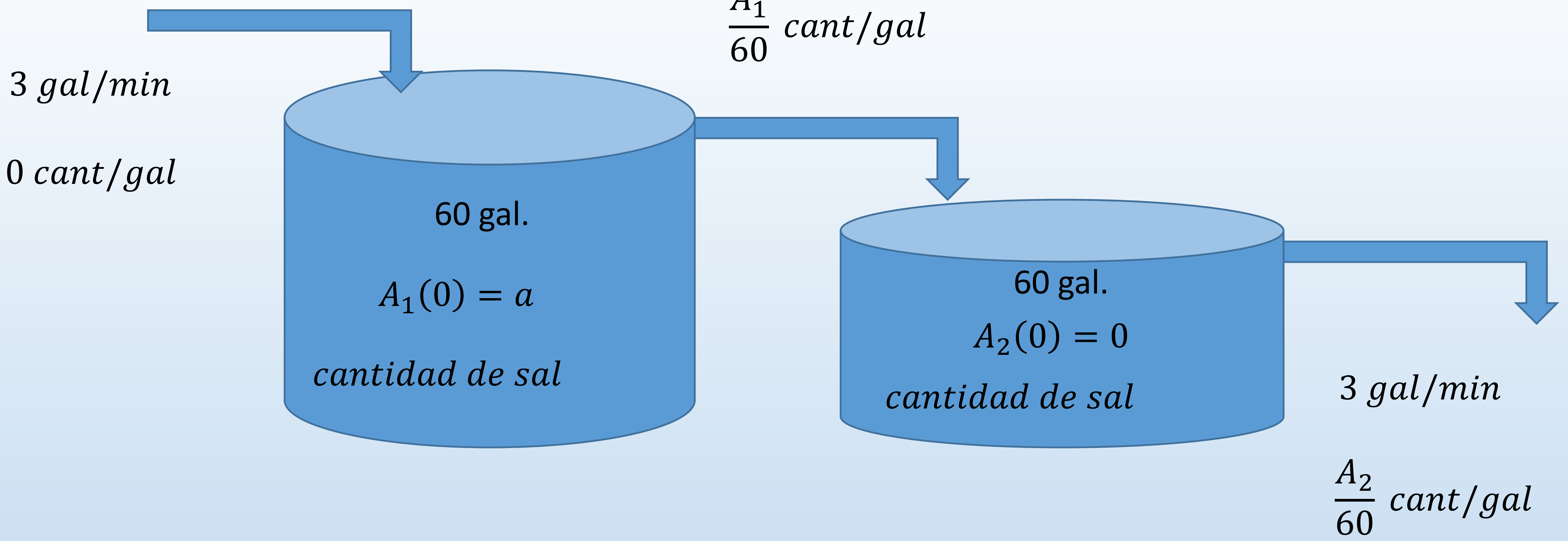
$$e^{-\frac{3}{50}t}=\frac{1}{2}$$

$$t=-\frac{500}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=115{,}52$$

Por lo tanto, el tanque llegará a una concentración de $0{,}05\ kig/lit$. en un tiempo de $115{,}52\ min$.

Ejemplo. Desde el instante $t=0$ se bombea agua pura a razón de $3\ gal/min$ en un tanque de 60 galones lleno con una solución salina. La mezcla resultante se desborda con la misma razón en un segundo tanque de 60 galones que inicialmente estaba lleno con agua pura, y de ahí se derrama al piso. Suponiendo una mezcla homogénea en ambos tanques, ¿en qué momento será más salada el agua del segundo tanque? ¿Qué tan salada estará, comparada con la solución original?

Solución.



$A_1(t)$: Cantidad de sal en el primer tanque en cada tiempo t

$A_2(t)$: Cantidad de sal en el segundo tanque en cada tiempo t

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA_1}{dt} = -\frac{A_1}{20} \Longrightarrow A_1(t) = ce^{-\frac{1}{20}t} \\ \\ &A_1(0) = a \Longrightarrow c = a \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A_1(t) = ae^{-\frac{1}{20}t}$$

$$\frac{dA_2}{dt} = 3\frac{A_1}{60} - 3\frac{A_2}{60} = \frac{a}{20}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{A_2}{20} \Longrightarrow A_2(t) = \left(\frac{a}{20}t + c\right)e^{-\frac{1}{20}t}$$

$$A_2(0) = 0 \Longrightarrow c = 0 \Longrightarrow A_2(t) = \frac{a}{20}te^{-\frac{1}{20}t}$$

Sea t el momento a partir del cual es más salada el agua del segundo tanque, entonces

$$A_1(t) = A_2(t)$$

$$ae^{-\frac{1}{20}t} = \frac{a}{20}te^{-\frac{1}{20}t}$$

$$1 = \frac{t}{20} \Longrightarrow t = 20$$

Esto es, el agua del segundo tanque es más salada a partir de $t = 20\,min$.

Nótese que cuando $t = 20$

$$A_2(20) = \frac{a}{20}(20)e^{-\frac{1}{20}(20)} = \frac{1}{e}a$$

Por lo tanto, cuando $t = 20$, el agua del segundo tanque estará $\frac{1}{e}$ veces más salada que la solución original.

Ley de Newton del enfriamiento

La ley del enfriamiento de Newton puede ser establecida mediante la siguiente hipótesis:
La tasa de cambio de la temperatura T(t) de un cuerpo con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre T y la temperatura A del medio ambiente.
Esto es,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A),$$

donde *k* es una constante positiva. Nótese que si $T > A$, entonces $\frac{dT}{dt} < 0$, de modo que la temperatura es una función decreciente de *t* y el cuerpo se está enfriando. Pero, si $T < A$, entonces $\frac{dT}{dt} > 0$, y por tanto *T* está aumentando.

Ejemplo. Un termómetro se lleva de un recinto interior hasta el ambiente exterior, donde la temperatura del aire es $5^o F$. Después de un minuto, el termómetro marca $55^o F$, y después de 5 marca $30^o F$. ¿Cuál es la temperatura del recinto interior?. Suponga que se sigue la ley de Newton del enfriamiento.

Solución.

Sea *T(t)* la temperatura del termómetro en cada tiempo *t,* entonces como se sigue la ley de Newton del enfriamiento

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-5)$$

Separando variables e integrando obtenemos

$$\int \frac{1}{T-5}\,dT = -\int k\,dt$$

$$\ln|T-5| = -kt + C$$

$$\mathrm{T} - 5 = \pm e^{C} e^{-kt}$$

$$T(t) = 5 + C_1 e^{-kt}$$

Como después de un minuto, el termómetro marca $55^o F$, entonces

$$T(1) = 55 \Longrightarrow 5 + C_1 e^{-k} = 55 \Longrightarrow C_1 e^{-k} = 50 \tag{28}$$

Como después de cinco minuto, el termómetro marca $30^o F$, entonces

$$T(5) = 30 \Longrightarrow 5 + C_1 e^{-5k} = 30 \Longrightarrow C_1 e^{-5k} = 25 \tag{29}$$

Despejando C_1 de (2) y (3) e igualando obtenemos

$$50e^k = 25e^{5k} \Longrightarrow e^{4k} = 2 \Longrightarrow k = \frac{1}{4}\ln 2 = 0{,}173\,29.$$

Finalmente, sustituyendo en (28)

$$C_1 = 50e^{0{,}173\,29} = 59{,}461$$

Así, la temperatura del termómetro en cada tiempo t es

$$T(t) = 5 + 59{,}461e^{-0{,}17329t}$$

y la temperatura del recinto interior es

$$T(0) = 5 + 59{,}461 = 64{,}461^{o}F$$

Ejemplo. Era el mediodía en un frío día de diciembre en Tampa, $16^{o}C$. El detective Taylor llego a la escena del crimen para hallar al sargento sobre el cadáver. El sargento dijo que habían varios sospechosos. Si supieran el momento exacto de la muerte, podrían reducir la lista de sospechosos. El detective Taylor sacó un termómetro y midió la temperatura del cuerpo, $34{,}5^{o}C$. Luego salió a comer. Al regresar, a la $1{:}00\ PM.$, halló que la temperatura del cuerpo era de $33{,}7^{o}C$. ¿En que momento ocurrió el asesinato? Suponga que se sigue la ley de Newton del enfriamiento y que la temperatura normal del cuerpo es de $37^{o}C$

Solución.

Suponga que el detective Taylor llego a la escena del crimen cuando $t = 0$ (mediodía). Como la temperatura ambiente es de 16^oC y se sigue la ley de Newton del enfriamiento, el *PVI* que modela el problema es

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 16), \qquad T(0) = 34{,}5 \tag{30}$$

Con un razonamiento análogo al seguido en el ejemplo anterior obtenemos que la solución general de la EDO es

$$T(t) = 16 + Ce^{-kt}$$

Como

$$T(0) = 34{,}5 \Longrightarrow 16 + Ce^{-k(0)} = 34{,}5 \Longrightarrow C = 18{,}5$$

Por otra parte, como $T(1) = 33{,}7$, entonces

$$T(1) = 33{,}7 \Longrightarrow 16 + 18{,}5e^{-k(1)} = 33{,}7 \Longrightarrow e^{-k} = \frac{33{,}7 - 16}{18{,}5} = 0{,}957$$

$$\Longrightarrow -k = \ln(0{,}957) \Longrightarrow k = 0{,}044$$

Por lo tanto, la temperatura del cuerpo en cada tiempo t es

$$T(t) = 16 + 18{,}5e^{-0{,}044t}$$

Ahora bien, como la temperatura normal del cuerpo es de $37^{o}C$, el asesinato ocurrió cuando

$$T(t) = 37 \Longrightarrow 16 + 18{,}5e^{-0{,}044t} = 37$$

$$\Longrightarrow e^{-0{,}044t} = 1{,}135$$

$$\Longrightarrow t = -\frac{1}{0{,}044} ln(1{,}135) = -2{,}9$$

No es de sorprender que t sea negativo, pues, cuando $t = 0$ ya había ocurrido el asesinato. Esto implica que el asesinato ocurrió 2,9 horas antes del mediodía, esto es, ocurrió a las 9:06 AM del mismo día en que fue conseguido el cuerpo. (Nótese que 2,9 horas representan 2 horas y 54 minutos)

Calentamiento y enfriamiento de inmuebles

Formularemos un modelo matemático que describa el perfil de la temperatura dentro de un inmueble durante 24 horas, como función de la temperatura exterior, el calor generado dentro del inmueble y el calefactor o el aire acondicionado.

$T(t)$: Temperatura dentro del inmueble en el instante t y veamos el inmueble como un único departamento.

Se tomaran en cuenta tres factores importantes que afectan la temperatura dentro del inmueble.

$H(t)$: Razón de incremento en la temperatura causada por el calor generado por las personas, las luces y las máquinas dentro del inmueble.

$U(t)$: Razón de calentamiento o enfriamiento proporcionado por la calefacción o el aire acondicionado

En general, $H(t)$ y $U(t)$ quedan descritas en términos de energía por unidad de tiempo $(Btu/hora)$. Sin embargo, al multiplicar por la capacidad calórica del edificio (F^o/Btu), podemos expresar las dos unidades, $H(t)$ y $U(t)$, en términos de temperatura por unidad de tiempo.

$M(t)$: Temperatura exterior

La **Ley del enfriamiento de Newton** establece que hay una razón de cambio de la temperatura $T(t)$ que es proporcional a la diferencia entre la temperatura exterior $M(t)$ y la temperatura interior $T(t)$. Es decir, la razón de cambio en la temperatura del inmueble debido a $M(t)$ es

$$-k[T(t) - M(t)] = k[M(t) - T(t)]$$

donde *k* es una constante positiva que depende de las propiedades del inmueble.

Nótese que cuando la temperatura exterior es mayor que la temperatura interior, $M(t) - T(t) > 0$ y hay un incremento en la temperatura del inmueble debido a $M(t)$. Por otro lado, cuando la temperatura exterior es menor que la temperatura interior, $M(t) - T(t) < 0$ y la temperatura del inmueble disminuye.

En conclusión, vemos que

$$\frac{dT}{dt} = -k[T(t) - M(t)] + \mathrm{H(t)} + \mathrm{U(t)}$$

donde $H(t)$ siempre es no negativa y $U(t)$ es positiva para la calefacción y negativa para el aire acondicionado.

Ejemplo. Suponga que al final del día (en el instante t_0), cuando las personas salen del edificio, la temperatura exterior permanece constante e igual a M_0**.** La razón de calentamiento adicional H dentro del edificio se anula y la razón de uso del calefactor o el aire acondicionado U también se anula. Determinar $T(t)$**,** dada la condición inicial $T(t_0) = T_0$.

Solución. Como $M = M_0,\ y\ U = H = 0$, la EDO

$$\frac{dT}{dt} = -k[T(t) - M(t)] + \mathrm{H(t)} + \mathrm{U(t)}$$

se convierte en

$$\frac{dT}{dt} = -k[T(t) - M_0]$$

Separando variables e integrando obtenemos

$$T(t) = M_0 + Ce^{-kt}$$

Como

$$T(t_0) = T_0 \Longrightarrow T_0 = M_0 + Ce^{-kt_0} \Longrightarrow c = (T_0 - M_0)e^{kt_0}$$

Entonces

$$T(t) = M_0 + (T_0 - M_0)e^{-k(t-t_0)}$$

Nótese que el tiempo que tarda la diferencia de temperatura

$$T(t) - M_0 = (T_0 - M_0)e^{-k(t-t_0)}$$

en cambiar de $T_0 - M_0$ a $\frac{T_0 - M_0}{e}$ es $\frac{1}{k}$.

Se dice que $\frac{1}{k}$ es la **constante de tiempo para el edificio** (sin calefacción o aire acondicionado).

Ejemplo. En una calurosa mañana, cuando las personas trabajan dentro del edificio, el aire acondicionado mantiene la temperatura interior en $24^o C$**.** A mediodía, el aire acondicionado se apaga y las personas se van a casa. La temperatura exterior es constante e igual a $35^o C$ durante el resto de la tarde. Si la constante de tiempo del edificio es de 4 horas, ¿cuál será la temperatura dentro del edificio a las 2:00 PM.? ¿Y a las 6:00 PM.? ¿En qué momento llegará la temperatura interior del edificio a $27^o\ C$?

Solución. Nótese que

$$T(0) = 24, \qquad M(t) = 35, \qquad H(t) = 0, \qquad U(t) = 0 \;\; y \;\; k = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, el PVI que modela el problema es

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{4}(T - 35), \qquad T(0) = 24$$

Separando variables e integrando obtenemos que

$$\int \frac{1}{T-35}\,dT = -\int \frac{1}{4}\,dt$$

$$ln|T - 35| = -\frac{1}{4}t + c$$

$$T(t) = 35 + c_1 e^{-\frac{1}{4}t}$$

Como

$$T(0) = 24 \Longrightarrow c_1 = -11$$

Por lo tanto,

$$T(t) = 35 - 11e^{-\frac{1}{4}t}$$

Ahora bien, podemos responder a las preguntas planteadas.

La temperatura dentro del edificio a las 2:00 PM. es

$$T(2) = 35 - 11e^{-\frac{1}{4}(2)} = 35 - 11e^{-\frac{1}{2}} = 28{,}33^{o}\ C$$

La temperatura dentro del edificio a las 6:00 PM. es

$$T(2) = 35 - 11e^{-\frac{1}{4}(6)} = 35 - 11e^{-\frac{3}{2}} = 32{,}55^{o}\ C$$

Sea t el momento en que la temperatura interior del edificio llega a $27^o\ C$, entonces

$$T(t) = 27$$

$$35 - 11e^{-\frac{1}{4}t} = 27$$

$$e^{-\frac{1}{4}t} = \frac{8}{11}$$

$$t = -4ln\frac{8}{11} = 1{,}27$$

Por lo tanto, la temperatura interior del edificio llegará a $27^o\ C$ a la 1:16 PM.

Ejemplo. Un sistema de calentamiento de agua mediante energía solar consta de un tanque de agua caliente y un panel solar. El tanque está bien aislado y tiene una constante de tiempo de 64 horas. El panel solar genera $2000\ Btu/hora$ durante el día, y el tanque tiene una capacidad calórica de 2^oF por $1000\ Btu$. Si el agua en el tanque está inicialmente a $110^o\ F$ y la temperatura del cuarto donde está el tanque es de $80^o\ F$, ¿cuál será la temperatura en el tanque después de 12 horas de luz solar?

Solución. Nótese que

$$k = \frac{1}{64}$$

$$H(t) = \left(2000\ \frac{Btu}{Hora}\right)\left(\frac{2}{100}^{o}\ \frac{F}{Btu}\right) = 4^{o}\,\frac{F}{Hora}$$

$$T(0) = 110^{o}\ F$$ y

$$M(t) = 80^{o}\ F$$

Por lo tanto, el PVI que modela el problema es

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{64}(T - 80) + 4, \qquad T(0) = 110$$

Esta EDO es lineal. Escribiéndola de la forma

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{64}T = \frac{21}{4}$$

obtenemos que el factor integrante es $e^{\frac{1}{64}t}$. Multiplicando cada miembro de la EDO anterior por su factor integrante e integrando obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(Te^{\frac{1}{64}t}\right) = \frac{21}{4}e^{\frac{1}{64}t}$$

$$Te^{\frac{1}{64}t} = 336e^{\frac{1}{64}t} + c$$

$$T(t) = 336 + ce^{-\frac{1}{64}t}$$

Como

$$T(0) = 110 \Longrightarrow 110 = 336 + c \Longrightarrow c = -226$$

Por lo tanto, la temperatura del tanque en cada tiempo t de luz solar es

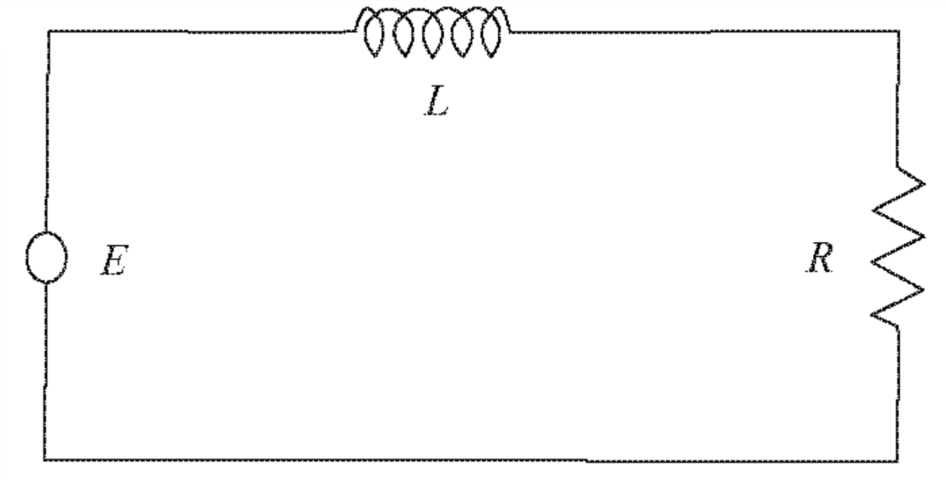
$$T(t) = 336 - 226e^{-\frac{1}{64}t}$$

Esto implica que la temperatura del tanque después de 12 horas de luz solar será

$$T(12) = 336 - 226e^{-\frac{1}{64}(12)} = 336 - 226e^{-\frac{3}{16}} = 148{,}64^{o}\ F$$

Circuitos en serie

Cuando un circuito en serie solo contiene un inductor y un resistor (circuito *LR*),

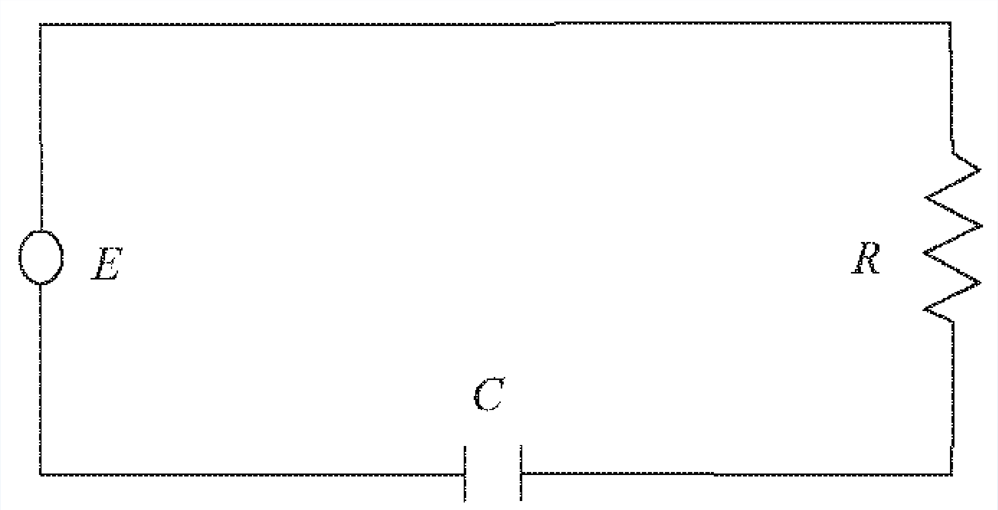


la segunda ley de Kirchhoff establece que las sumas de las caídas de voltaje a través del inductor, $L\frac{di}{dt}$, y del resistor, Ri, es igual al voltaje aplicado, $E(t)$

$$L\frac{di}{dt} + \mathrm{Ri} = \mathrm{E(t)}$$

donde que *L* y *R* son las constantes conocidas como inductancia y resistencia. La corriente $i(t)$ también es llamada respuesta del sistema.

Si el circuito en serie contiene un resistor y un capacitor (Circuito *RC*)



La caída de voltaje a través de un capacitor de capacitancia *C* es $\frac{q(t)}{C}$, donde *q* es la carga del capacitor, por lo tanto, para el circuito RC en serie, la segunda ley de Kirchhoff establece

$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t)$$

$$\mathrm{i} = \frac{dq}{dt} \Longrightarrow R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

Unidades utilizadas en los circuitos eléctricos

Cantidad	Representación literal	Unidades
Fuente de voltaje	*E*	Voltio *(V)*
Residencia	*R*	Ohm *(Ω)*
Inductancia	*L*	Henrio (H)
Capacitancia	*C*	Faradio *(F)*
Carga	*q*	Coulomb *(C)*
corriente	*i*	Amperio (A)

Ejemplo. Se aplica una fuerza electromotriz de $30\ V$. a un circuito en serie *LR* con $\frac{1}{10}\ H$. de inductancia y 50 Ω de resistencia. Si $i(0) = 0$, halle la corriente cuando $t \to \infty$.

Solución. Como se trata de un circuito en serie *LR*, el *PVI* que modela el problema es

$$\frac{1}{10}\frac{di}{dt} + 50\mathrm{i} = 30, \qquad \mathrm{i}(0) = 0.$$

Separando variables e integrando obtenemos

$$\int \frac{1}{30 - 50i}\, di = \int 10 dt$$

$$-\frac{1}{50} ln|3 - 5i| = 10t + c$$

$$3 - 5i = C_1 e^{-500t}, \qquad C_1 = \pm e^{-50c}$$

$$\mathrm{i}(t) = \frac{3}{5} + C_2 e^{-500t}, \qquad C_2 = -\frac{C_1}{5}$$

Como

$$i(0) = 0 \Longrightarrow C_2 = -\frac{3}{5}$$

Por lo tanto, la solución del *PVI* es

$$\mathrm{i}(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} e^{-500t}$$

y

$$\lim_{t \to \infty} i(t) = \lim_{t \longrightarrow \infty} \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5} e^{-500t} \right) = \frac{3}{5}$$

Ejemplo. Se aplica una fuerza electromotriz de *100 V* a un circuito en serie *RC*, en que la resistencia es $1000\ \Omega$ y la capacitancia es $5 \cdot 10^{-6} F$. Determine la carga *q(t)* del capacitor, si $i(0) = 0{,}4\ A$. Halle la corriente *i(t).*

Solución. Como se trata de un circuito en serie *RC,* obtenemos la ecuación

$$1000\frac{dq}{dt} + \frac{1}{5 \cdot 10^{-6}}q = 100$$

Multiplicando cada miembro de la ecuación por 10^{-3}, separando variables e integrando, obtenemos

$$\frac{dq}{dt} + 200q = \frac{1}{10} \Longrightarrow \int \frac{1}{1 - 2000q}dq = \int \frac{1}{10}dt$$

$$1 - 2000q = C_1 e^{-200t}, \qquad C_1 = \pm e^{-2000c}$$

$$q(t) = \frac{1}{2000} + C_2 e^{-200t}, \qquad C_2 = -\frac{C_1}{2000}$$

Como $i(0) = q'(0) = 0{,}4 = \frac{2}{5}$ y $q'(t) = -200C_2 e^{-200t}$, entonces

$$-200C_2 e^{-200(0)} = \frac{2}{5} \Longrightarrow C_2 = -\frac{1}{500}$$

Por lo tanto, la carga del capacitor es

$$q(t) = \frac{1}{2000} - \frac{1}{500} e^{-200t}$$

y la corriente

$$i(t) = q'(t) = \frac{2}{5} e^{-200t}$$

Mecánica de Newton

La mecánica de Newton trata del movimiento de los objetos comunes.

Leyes del Movimiento de Newton

1. Todo cuerpo tiende a mantener el estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, cuando se sujeta a una fuerza resultante nula.
2. La suma vectorial de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración que adquiere en su trayectoria.
3. Cuando un cuerpo interactúa con otro, la fuerza del primer cuerpo sobre el segundo es igual en magnitud, pero opuesta en dirección, a la fuerza del segundo cuerpo sobre el primero.

Estas layes son útiles para el estudio de los objetos comunes en un marco de referencia inercial, es decir, un marco de referencia en donde un cuerpo no perturbado se mueve con velocidad constante. En este sentido, podemos expresar la segunda ley de Newton como

$$m\frac{dv}{dt} = F(t, x, v) \qquad (31)$$

donde $F(t, x, v)$ es la fuerza resultante sobre el cuerpo en el instante *t,* posición *x* y velocidad *v.*

Por lo general , la sustitución $v = \frac{dx}{dt}$ en (1) produce una EDO de segundo orden en la variable dependiente *x.*

Nos centraremos en situaciones donde la fuerza *F* no depende de *x*. Esto nos permite considerar (31) como la EDO de primer orden

$$m\frac{dv}{dt} = F(t, v)$$

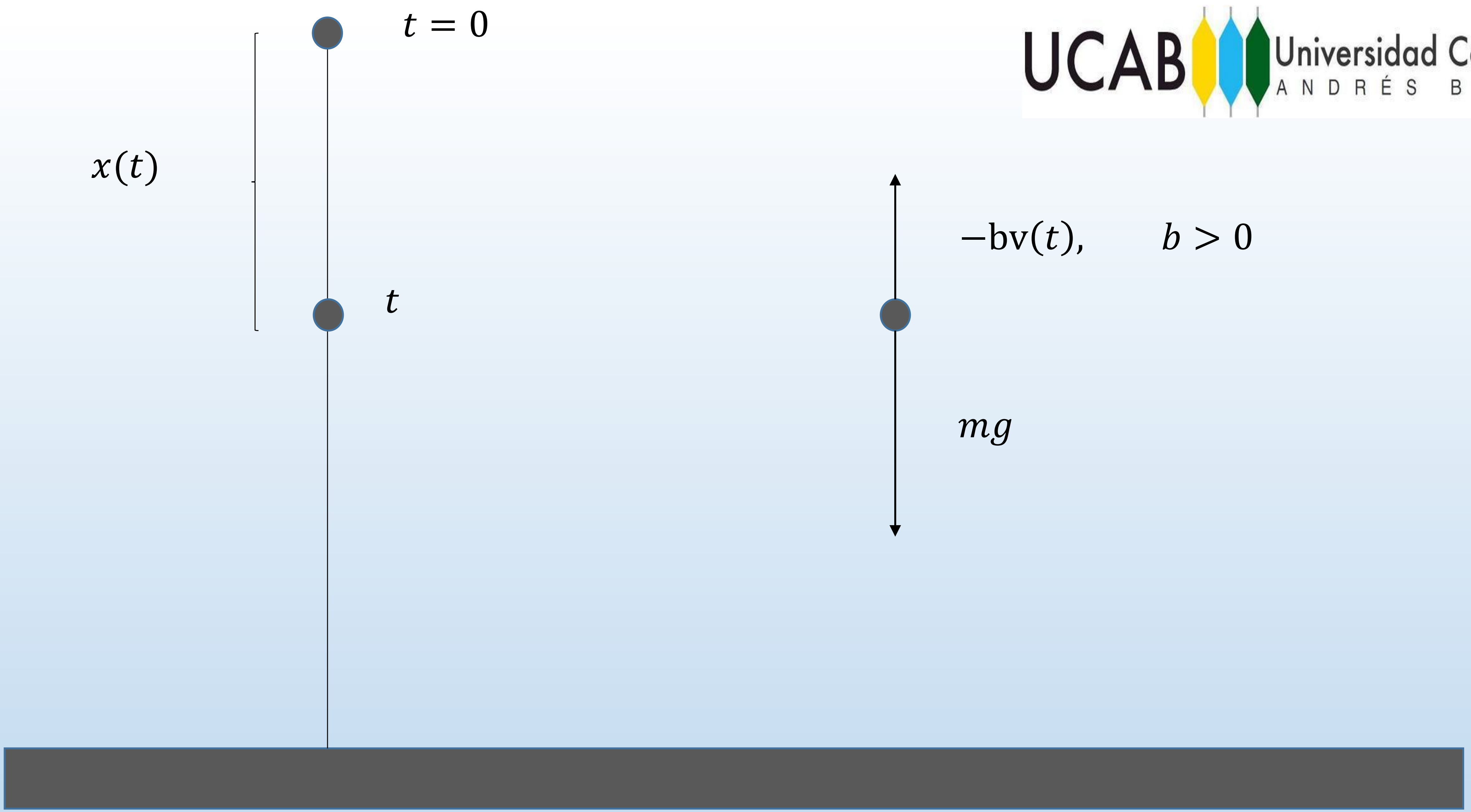
Expresaremos la segunda ley de Newton en uno de los dos sistemas de unidades: sistema inglés o sistema MKS. Las diversas unidades de estos sistemas se muestran en la siguiente tabla.

Unidad	Sistema Inglés	MKS
Distancia	pies (ft)	metros (m)
Masa	slugs	kilogramos (kg)
Tiempo	segundos (s)	segundos (s)
Fuerza	libras (lb)	newtons (N)
Gravedad	32 pies/s^2	9,81 m/s^2

Ejemplo. Un objeto de masa m recibe una velocidad inicial hacia abajo v_0 y se le permite caer bajo la influencia de la gravedad. Si la fuerza gravitacional es constante y la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto, determinar la ecuación del movimiento para este objeto.

Solución. Hay dos fuerzas actuando sobre el objeto: Una fuerza constante debida a la gravedad y una fuerza debida a la resistencia del aire, que actúa en forma opuesta al movimiento del objeto. Por lo tanto, el movimiento del objeto se realizará a lo largo de un eje vertical. En este eje, elegimos el origen como el punto donde el objeto fue lanzado inicialmente y definimos $x(t)$ como la distancia que ha caído el objeto en el instante t.

En la siguiente figura se ilustran las fuerzas que actúan sobre el objeto.


$t = 0$
$x(t)$
t
$-\mathrm{bv}(t), \quad b > 0$
mg

Como la velocidad inicial del objeto es v_0, aplicando la segunda ley de Newton obtenemos un PVI que modela la velocidad del cuerpo que cae.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv, \qquad v(0) = v_0$$

Separando variables e integrando obtenemos que la solución del PVI es

$$v(t) = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t}$$

Sustituyendo $v = \frac{dx}{dt}$ en la ecuación anterior e integrando con respecto a t obtenemos la ecuación del movimiento del objeto

$$x(t) = \frac{mg}{b}t - \frac{m}{b}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t} + c$$

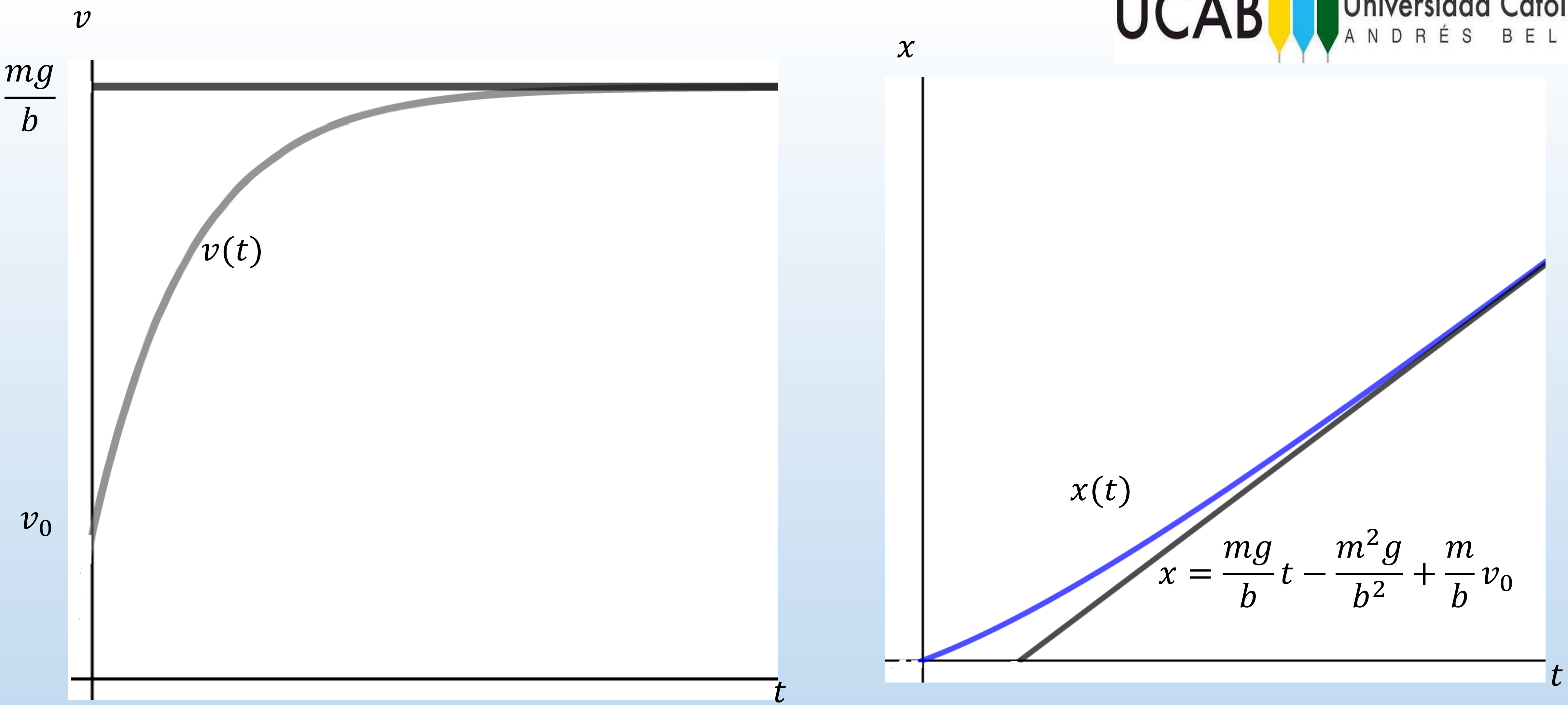
como

$$x(0) = 0 \Longrightarrow c = \frac{m}{b}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)$$

Por lo tanto, la ecuación del movimiento es

$$x(t) = \frac{mg}{b}t + \frac{m}{b}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

En la siguiente figura hemos bosquejado las gráficas de la velocidad y la posición como funciones de t



Gráficas de la velocidad y la posición de un objeto, cuando $v_0 < \frac{mg}{b}$

El valor $\frac{mg}{b}$ de la asíntota horizontal para $v(t)$ es la **velocidad límite o velocidad terminal** del objeto.

Nótese que la velocidad terminal depende de la masa pero no de la velocidad inicial del objeto. La velocidad de cualquier cuerpo en caída libre tiene el valor límite $\frac{mg}{b}$. Para un objeto dado, la velocidad terminal es la misma, sin importar que se lance hacia arriba o hacia abajo, o simplemente se lance desde el reposo.

Ejemplo. Un objeto con masa de $100\ kg$. Se lanza desde el reposo de un lancha hacia el agua y se deja hundir. Aunque la gravedad jala el objeto hacia abajo, una fuerza de flotación de $\frac{1}{40}$ veces el peso del objeto lo empuja hacia arriba ($peso = mg$). Si suponemos que la resistencia del agua ejerce sobre el objeto una fuerza proporcional a la velocidad del objeto, con constante de proporcionalidad $10\ N - s/m$**,** determine la ecuación del movimiento del objeto. ¿Después de cuantos segundos ocurrirá que la velocidad del objeto es igual a $70\ m/s$?

Solución. El PVI que modela el problema es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{40}mg - 10v, \qquad v(0) = 0$$

Como $m = 100\ kg \quad y \quad g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$, entonces

$$100\frac{dv}{dt} = 981 - \frac{981}{40} - 10v, \quad v(0) = 0$$

La EDO la podemos escribir como

$$100\frac{dv}{dt} + 10v = 956{,}475$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{10}v = 9{,}565$$

Claramente la EDO es lineal y de factor integrante $e^{\frac{1}{10}t}$, por lo tanto, multiplicando cada miembro de la EDO por dicho factor integrando e integrando obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(ve^{\frac{1}{10}t}\right) = 9{,}565e^{\frac{1}{10}t}$$

$$ve^{\frac{1}{10}t} = 95{,}65e^{\frac{1}{10}t} + c$$

$$v(t) = 95{,}65 + ce^{-\frac{1}{10}t}$$

Como

$$v(0) = 0 \Longrightarrow c = -95{,}65$$

Por lo tanto,

$$v(t) = 95{,}65 - 95{,}65e^{-\frac{1}{10}t}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior $v(t)$ por $\frac{dx}{dt}$ e integrando obtenemos

$$\mathrm{x}(t) = 95{,}65t + 956{,}5e^{-\frac{1}{10}t} + c$$

Como

$$x(t) = 0 \Longrightarrow 956{,}5 + c = 0 \Longrightarrow c = -965{,}5$$

Por lo tanto, la ecuación del movimientos es

$$\mathrm{x}(t) = 95{,}65t + 956{,}5e^{-\frac{1}{10}t} - 965{,}5$$

Finalmente, si *t* es el tiempo en el cual la velocidad del objeto es igual a $70\frac{m}{s}$., entonces

$$v(t) = 95{,}65 - 95{,}65e^{-\frac{1}{10}t} = 70$$

$$e^{-\frac{1}{10}t} = 0{,}268$$

$$t = -10\ln(0{,}268) = 13{,}167\ s.$$

Ejemplo. Un paracaidista cuya masa es $75\ kg$. se arroja de un helicóptero que vuela a 2000 m. sobre el suelo y cae bajo la influencia de la gravedad. Suponga que la fuerza debido a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del paracaidista, con la constante de proporcionalidad $b_1 = 30\ N - s/m$ cuando el paracaídas está cerrado y $b_2 = 90\ N - s/m$ cuando se abre. Si el paracaídas no se abre hasta que la velocidad del paracaidista es de $20\ m/s$, ¿después de cuantos segundos llegará él al suelo?

Solución. Consideraremos que el descenso es vertical. Para dar respuesta al problema necesitamos dos ecuaciones: Una para describir el movimiento antes de abrir el paracaídas y la otra para aplicarse después de abrirlo.

Antes de abrirse el paracaídas el modelo es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - b_1 v_1, \qquad v_1(0) = 0$$

La solución de este PVI es

$$v_1(t) = \frac{mg}{b_1} + \left(0 - \frac{mg}{b_1}\right) e^{-\frac{b_1}{m}t}$$

$$v_1(t) = \frac{(75)(9{,}81)}{30} + \left(0 - \frac{(75)(9{,}81)}{30}\right) e^{-\frac{30}{75}t}$$

$$v_1(t) = 24{,}525 - 24{,}525e^{-0{,}4t}$$

Sustituyendo $v_1(t)$ por $\frac{dx_1}{dt}$ e integrando, obtenemos

$$x_1(t) = 24{,}525t + 61{,}313e^{-0{,}4t} + c$$

Como

$$x_1(0) = 0 \Longrightarrow 61{,}313 + c = 0 \Longrightarrow c = -61{,}313$$

Por lo tanto,

$$x_1(t) = 24{,}525t + 61{,}313e^{-0{,}4t} - 61{,}313$$

Ahora bien, sea *t* el tiempo que tarda el paracaidista para abrirse, entonces

$$v_1(t) = 24{,}525 - 24{,}525e^{-0{,}4t} = 20$$

$$e^{-0{,}4t} = 0{,}185 \longrightarrow t = -\frac{1}{0{,}4}\ln(0{,}185) = 4{,}218\ s.$$

Durante ese tiempo el paracaidista ha caído

$$x_1(4{,}218) = 24{,}525(4{,}218) + 61{,}313e^{-0{,}4(4{,}218)} - 61{,}313 = 53{,}479\ m$$

Por lo tanto, al abrirse el paracaídas, el paracaidista estará a

$$2000 - 53{,}479 = 1946{,}521\ m.$$

Sobre el suelo.

Para determinar la ecuación del movimiento después de abrirse el paracaídas, consideramos el modelo

$$m\frac{dv_2}{dt} = mg - b_2 v_2, \qquad v_2(0) = 20\ m/s$$

Para este caso, obtenemos que

$$v_2(t) = \frac{mg}{b_2} + \left(20 - \frac{mg}{b_2}\right)e^{-\frac{b_2}{m}t}$$

$$v_2(t) = \frac{(75)\,(9{,}81)}{90} + \left(20 - \frac{(75)(9{,}81)}{90}\right)e^{-\frac{90}{75}t}$$

$$v_2(t) = 8{,}175 + 11{,}825e^{-1{,}2t}$$

Sustituyendo $v_2(t)$ por $\frac{dx_2}{dt}$ e integrando, obtenemos

$$x_2(t) = 8{,}125t - 9{,}854e^{-1{,}2t} + c$$

Como

$$x_2(0) = 0 \Longrightarrow -9{,}845 + c = 0 \Longrightarrow c = 9{,}845\ m$$

Por lo tanto

$$x_2(t) = 8{,}125t - 9{,}854e^{-1{,}2t} + 9{,}845$$

Sea t el tiempo que tarda el paracaidista para llegar al suelos, desde el momento en que el paracaídas se abre, entonces

$$x_2(t) = 8{,}125t - 9{,}854e^{-1{,}2t} + 9{,}845 = 1946{,}521$$

$$8{,}125t - 9{,}854e^{-1{,}2t} = 1936{,}676$$

$$t - 1{,}213e^{-1{,}2t} = 238{,}36$$

Nótese que no podemos despejar t en forma explícita, sin embargo, $e^{-1{,}2t}$ es muy pequeño cuando $t = 238{,}36$, de modo que podemos ignorar el término exponencial y obtener $t = 238{,}36$.

Por lo tanto, el paracaidista golpeara el suelo $t = 238{,}36$ s después de abrir el para caídas, o $t = 238{,}36 + 4{,}218 = 242{,}578\ s$ después de arrojarse desde el helicóptero.

BIBLIOGRAFÍA

1. Campbell S. y Haberman R. (1998). **Introducción a las ecuaciones diferenciales con problemas de valor de frontera.** McGraw-Hill. México.
2. Chicone C. (1991). **Ordinary differential equations with applications.** Springer. New York.
3. Edwards C. y Penney d. (2009). **Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.** Cuarta edición. Pearson Educación. México.
4. Nagle K., Saff E. y Snider A. (2005). **Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.** Cuarta edición. Pearson Educación. México.
5. Po-Fang H. and Yasutaka S. (1991). **Basic theory of ordinary differential equations.** Springer. New York.
6. Simmons G. (1993). **Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas.** Segunda edición. McGraw-Hill. Madrid.
7. Zill D. y Dewar J. (2008). **Matemáticas avanzadas para Ingeniería, Vol. 1. Ecuaciones diferenciales.** Tercera edición. McGraw-Hill. México.